Einführung in die Logik für Linguisten

1 Welche Logik brauchen wir ? 2
2 Wissenschaftstheorie und Regeln 6
2.1. Allgemeine Überlegungen 6
2.2. Geisteswissenschaft <> Naturwissenschaft 8
2.3. Beobachten | Kontrast | Abstraktion | Messen | Maß | Einheit 9
2.4. Einige Beispiele für verfälschte Wahrnehmung 10
2.5. Messen und Maße 11
2.6. Wie genau wird gemessen? 11
2.7. Abstraktion 11
2.8. Abstraktion und Wissenschaftlichkeit 12
2.9. Übergeneralisierung 12
3 Die Traditionelle Logik 13
3.1. Die Aristotelische Logik 13
3.2. Syllogismus: Form und Inhalt 14
3.3. Die Axiome des Aristoteles 15
3.4. Die formale Logik 17
4 Die Mengenlehre von Georg Cantor 27
4.1. Willkürliche Mengen 27
4.2. Nicht willkürliche Mengen 28
4.3. Mengenoperationen 29
4.4. Zusammenfassung der Mengenalgebra 31
4.5. Unendliche Mengen 32
4.6. Was ist paradox? 33
4.7. Paradoxales 34
5 Grundlagen von Logik und Mathematik 34
5.1. Axiome 34
5.2. Die Äquivalenzrelation 36
5.3. Ordnungsrelationen 37
5.4. Lineare Ordnungsrelationen 38
5.5. Zyklische Ordnungsrelationen 39
5.6. Ordnungsstrukturen und Entscheidungen 42
5.7. Die sieben fetten und sieben mageren Jahre 43
5.8. Richtige und falsche Entscheidungen 44
6 Fuzzy Logic 45
6.1. Vorbemerkungen 45
6.2. Definition von Fuzzy Logic 45
6.3. Fuzzy Logic und Sprache 48
6.4. Die linke und die rechte Hirnhälfte 51
6.5. Mengen Operationen mit Zadeh-Mengen 54
6.6. Fuzzy Logic und intensionalen Mengen 56
6.7. Das Zadeh Komplement der Menge aller Männer. 62
7 Heuristik 65

1 Welche Logik brauchen wir ?

Diese Einführung versteht sich nicht als die xste Einführung in die formale Logik zum freundlichen Gebrauch für Linguisten, sondern als Einführung in „eine Logik des gesunden Menschenverstands" nicht nur für Linguisten. Eine Logik, die helfen kann brauchbare Schulgrammatiken zu schreiben, ebenso wie sie schon hilft intelligente Waschmaschinen, Scheibenwischer und Ampeln zu konstruieren.

An zwei einfachen Beispielen aus der Linguistik möchte ich zeigen, zu welchen Fehlern die übliche Logik führt, bzw. führen kann.

Beispiel 1 Linguistische Fachbegriffe

Zwei Wörter einer Sprache sind **Synonyme**, wenn sie die gleiche Bedeutung haben, wie z.B. „Gynäkob ge" und „Frauenarzt".

Wenn A und B für verschiedene Wörter des Deutschen stehen, Könnte man formal schreiben:

Wenn die Bedeutung von A gleich der Bedeutung von B ist, dann sind A und B Synonyme.

Wenn Bedeutung(A) = Bedeutung(B) dann B = Synonym(A) und A = Synonym(B)

Das sieht ziemlich sauber aus, aber es gibt einen kleinen Pferdefuß, denn wie kann man genau feststellen, ob A und B die gleiche Bedeutung haben, schließlich kann man nicht in den Kopf der Menschen kucken.

Hierauf haben viele Linguisten eine Standardantwort, nämlich

„A und B haben genau dann die gleiche Bedeutung, wenn man A und B in jedem beliebigen Kontext austauschen kann, ohne daß der Kontext sprachlich falsch oder unsinnig wird."

Diese scheinbar saubere Lösung hat aber zwei massive Pferdefüße.

1. Man kann ziemlich leicht zeigen, daß es dann in keiner Sprache Synonyme geben kann; denn in einer Äußerung vom Typ „Ein Gynäkologe ist ein Frauenarzt." kann man weder Gynäkologe durch Frauenarzt ersetzen („Ein Frauenarzt ist ein Frauenarzt."), noch kann man die Reihenfolge ändern („Ein Frauenarzt ist ein Gynäkologe."). (Beispiel analog zu einem Beispiel von Noam Chomsky)
2. Durch das Testverfahren wird die ursprüngliche Definition geändert, denn das Testverfahren definiert zwei Wörter A und B einer Sprache als Synonyme, dann und nur dann, wenn sie wechselseitig austauschbar sind.

Aus der ursprünglichen Definition:

Wenn die Bedeutung (A) = Bedeutung (B), dann sind A und B Synonyme.

Entsteht eine Definition in zwei Schritten:

1. **Wenn A und B beliebig austauschbar sind, dann ist die Bedeutung(A) = Bedeutung (B).**
2. **Wenn die Bedeutung (A) = Bedeutung (B), dann sind A und B Synonyme.**

Hieraus folgt die neue Definition

Wenn A und B beliebig austauschbar sind, dann sind A und B Synonyme.

Der erste Einwand zeigt, daß die neue Definition zu stark beschränkend ist, denn kein Wortpaar, von dem wir mit gesundem Menschenverstand sagen würden, daß es zwei bedeutungsgleiche Wörter, also Synonyme sind, übersteht die Definition:

Das Beispiel mit dem „Gynäkologen" und dem „Frauenarzt", zwei Wörter mit absolut gleicher Bedeutung, zeigt, daß die geforderte Eigenschaft der Austauschbarkeit zu stark ist, weil es eben echte Synonyme gibt, die in bestimmten ausgewählten Kontexten aber nicht austauschbar sind, wie „Ein Gynäkologe ist ein Frauenarzt." „Gynäkologe ist ein anderes Wort für Frauenarzt."

Bedauerlicherweise ist die zweite Definition aber auch nicht hinreichend beschränkend, denn sie erlaubt es, bedeutungsverschiedene aber äußerlich gleiche Wörter als Synonyme anzusehen,

weil diese eben grundsätzlich austauschbar sind. So kann man z.B. im Deutschen den Nominativ Plural des bestimmten Artikels (die) grundsätzlich gegen den Nominativ Singular des bestimmten weiblichen Artikels (die) austauschen, ohne daß die Äußerung falsch oder unsinnig würde, niemand würde den Austausch überhaupt bemerken.

Solche äußerlich identischen, aber inhaltlich verschiedenen Wortpaare werden in der Linguistik als Homonyme bezeichnet, und ich bin sicher, daß keiner der Linguisten, der das Austauschbarkeitskriterium für Synonyme gefordert hat, ernstlich die Homonyme als Unterkategorie der Synonyme definieren wollte, obwohl genau das erreicht wird.

Den Einwand, daß diese beiden „die" nicht dieselbe Bedeutung haben, kann man sofort als unzulässig zurückweisen, denn die zweite Definition vermeidet die Bedeutung als Kriterium, denn genau zu diesem Zweck ist sie schließlich eingeführt worden.

Natürlich kann man die Definition besser formulieren, um solche Probleme zu vermeiden:

Wenn A und B außer in genau bestimmten Fällen austauschbar und

wenn Bedeutung (A) nicht ≠ Bedeutung (B) ist, dann sind A und B Synonyme.

Da es viel einfacher ist die Ungleichheit von Bedeutungen als die Gleichheit von Bedeutungen festzustellen, ist die letzte Definition deutlich besser.

Mit dieser letzten Behauptung sind viele Logiker sicher nicht einverstanden, denn die Negation einer Negation führt zum Ausgangspunkt zurück oder formal nicht(nicht A) = A. Aber das alltägliche Leben beweist, daß wir uns viel leichter über Ungleichheit als über Gleichheit einigen können, das hängt wahrscheinlich damit zusammen, daß Gleichheit in der Wirklichkeit gar nicht existiert, wir also, wenn wir über Gleichheit diskutieren eigentlich immer nur über Grade von Ähnlichkeit diskutieren.

Trotzdem halte ich auch diese Definition eigentlich für nicht gelungen, denn es gibt meiner Meinung nach in vielen Sprachen echte Synonyme, die normalerweise nie austauschbar sind, wie z.B. „er – sie – es" im Deutschen oder die bestimmten Artikel „el – la – lo" im Spanischen, deren Verwendung durch syntaktische Regeln gesteuert werden.

Darüber hinaus gibt es „Quasi" Synonyme, die in den meisten Kontexten synonym sind, aber in einigen wenigen Fällen durch wechselseitige Ersetzung zu unterschiedlicher Bedeutung führen, wie z.B. „ser" und „estar" im Spanischen oder das „futur simple" und das „futur composé" im Französischen.

Aus den oben angeführten Gründen schlage ich die beiden folgenden Definitionen vor:

Wenn die Bedeutung (A) nicht ≠ Bedeutung (B), dann sind A und B Synonyme.

Wenn die Bedeutung (A) meistens nicht ≠ Bedeutung (B), dann sind A und B Quasi-Synonyme.

Ich glaube, daß man sowohl eine ziemlich treffende Interpretation von „nicht ≠" und von „meistens" aus der Sprachwirklichkeit erarbeiten kann, d.h. empirisch gewinnen kann. Die hierzu notwendigen Werkzeuge sollen in dieser Einführung vorgestellt werden.

Beispiel 2 Ein Kapitel aus einer Schulgrammatik

Der Modus im restriktiven Relativsatz

331

1. Gewünschte oder angenommene Eigenschaft – tatsächlich vorhandene Eigenschaft

- Der **Subjonctif** steht, wenn in Verbindung mit entsprechenden Elementen des einleitenden Satzes im Relativsatz eine Eigenschaft des Bezugselements als **wünschenswert** oder **hypothetisch** dargestellt wird.
- Der **Indikativ** steht, wenn in Verbindung mit entsprechenden Elementen des einleitenden Satzes im Relativsatz eine Eigenschaft des Bezugselements als **tatsächlich vorhanden** dargestellt wird.

Einleitender Satz in Form eines Aussage- oder Aufforderungssatzes

Gewünschte oder angenommene Eigenschaft	Tatsächlich vorhandene Eigenschaft
Nous cherchons / **Il nous faut** — **un** hôtel **qui** ne **soit** pas trop cher.	**Je connais** / **J'ai découvert** — un petit hôtel **qui est** très bien.
Marc **a besoin de quelqu'un qui le comprenne.**	Sylvie **est** une fille **qui le comprend** bien.
Anne **voudrait faire quelque chose** / Anne **aimerait faire quelque chose** / Anne **rêve de faire quelque chose** — **qui** lui **permette** de voyager.	Anne **a trouvé** un emploi **qui lui permet** de voyager en France et à l'étranger.
Trouvez-moi de la lecture **qui soit** passionnante et bien écrite.	**Rendez-moi** le livre **que je vous ai prêté** l'autre jour.
Imaginez / **Figure-toi** — **une** société **où il n'y ait pas** de différences sociales.	Le Brésil **est** un pays **où** les différences sociales **sont** considérables.

Im Relativsatz wird der Subjonctif häufig ausgelöst, wenn das Bezugselement im **einleitenden Satz** in Verbindung mit einem **Verb des Wünschens** oder einem **Verb der Annahme** steht, wie

chercher il (me) faut avoir besoin de	j'aimerais (faire) qc je voudrais (faire) qc trouve(z)-moi	rêver de (faire) qc penser à (faire) qc	imagine/imaginez figure-toi/figurez-vous

Beachte: Das Bezugselement des Relativsatzes ist ein Nomen mit **unbestimmtem** Artikel oder **Partitiv** oder ein **indefinites Pronomen** wie *quelque chose, quelqu'un.*

223

„Grammatik des heutigen Französisch" , Hans-Wilhelm Klein, Hartmut Kleineidam, Stuttgart 1986, Seite 223

Ich kann hier nicht auf jede Ungenauigkeit bzw. auf jeden Fehler eingehen und werde nur die kapitalen logischen Fehler aufgreifen.

> Der Subjonctif steht, wenn in Verbindung mit entsprechenden Elementen des einleitenden Satzes im Relativsatz eine Eigenschaft des Bezugselements als **wünschenswert** oder **hypothetisch** dargestellt wird.
>
> Der Indikativ steht, wenn in Verbindung mit entsprechenden Elementen des einleitenden Satzes im Relativsatz eine Eigenschaft des Bezugselements als **tatsächlich vorhanden** dargestellt wird.

Diesen Erklärungen folgen einsichtige, aber leider wohl ausgesuchte Beispiele:

B1 ***Nous cherchons un hôtel qui ne soit pas trop cher.***

B 11 *Nous chercherons un hôtel qui ne sera pas trop cher.*

B 12 *Nous avons cherché un hôtel qui n'était pas trop cher.*

B2 ***Je connais un petit hôtel qui est très bien.***

B21 *Je connais un petit hôtel qui serait très bien(pour vous).*

B11 und B12 sind bis auf die Wahl der Tempora inhaltlich gleich mit B1, d.h. das preiswerte Hotel bleibt eine wünschenswerte Eigenschaft von Hotels, trotzdem steht der Indikativ.

B21 ist vollkommen gleich mit B2 und obwohl der Sprecher die tatsächliche Existenz dieses Hotels behauptet ist die Eigenschaft des „Primaseins" eindeutig hypothetisch, trotzdem kann der Subjonctif hier überhaupt nicht stehen.

Offensichtlich liegt die Wahl zwischen Subjonctif und Indikativ nicht an der Art der „Eigenschaft des Bezugselements" wie in der Beschreibung behauptet, d.h. dieses Kapitel zum Gebrauch des Subjonctifs ist didaktisch unbrauchbar und linguistisch falsch.

Auch in diesem Fall steht man fassungslos vor einer von vorneherein als unsinnig zu erkennenden Beschreibung, denn Kategorien wie „**wünschenswert**" oder **„hypothetisch"** gegenüber **„tatsächlich vorhanden"** sind normalerweise nur eingeschränkt „**objektivierbar**", d.h. je nach Standpunkt, den ich einnehme, genügen beide folgenden Sätze der in der Grammatik genannten Regel.

1. ***Marc a besoin de quelqu'un qui le comprenne*. (Mark bräuchte jemanden, der ihn verstehen würde.)**
2. **Marc a besoin de quelqu'un qui le comprend. (Mark braucht jemanden, der ihn (wirklich) versteht.)**

Im ersten Satz äußert der Sprecher sich über eine unbekannte Person mit bestimmten Eigenschaften, von der er annimmt, daß es eine solche Person nicht gibt, deshalb „hypothetisch" und Subjonctif.

Im zweiten Satz äußert der Sprecher sich über eine unbekannte Person mit bestimmten Eigenschaften, von der er annimmt, daß es eine solche Person gibt, deshalb „tatsächlich vorhanden" und Indikativ.

3. ***Nous cherchons un hôtel qui ne soit pas trop cher*.**

„Preiswert" ist immer dann eine „wünschenswerte" Eigenschaft, wenn ich selbst bezahlen muß. Da die meisten von uns keine Hotelbesitzer sind, ist „preiswert" in diesem Fall tatsächlich eine wünschenswerte Eigenschaft, deshalb findet man dieses scheinbar zutreffende Beispiel in allen Grammatiken des Französischen seit fast ein hundert Jahren, wenn es dort ein Kapitel über den Gebrauch des Subjonctifs in Relativsätzen gibt. Trotzdem ist diese Lösung unsauber, denn dieser Äußerung liegt die folgende Bedeutung zu Grunde:

4. ***Nous cherchons un hôtel et nous aimerions qu'il ne soit pas trop cher*.**

Der Subjonctif steht in dem Satz also deshalb, weil in der Bedeutungsstruktur des Satzes „wir möchten" steht, d.h. es geht nicht um eine „wünschenswerte Eigenschaft", sondern um eine „vom Sprecher gewünschte Eigenschaft", und nach „aimer que" steht grundsätzlich der Subjonctif.

Didaktisch unbrauchbar und linguistisch falsch sind schwer wiegende Urteile, sie beruhen darauf, daß man die aufgeführten Regeln vielleicht lernen (Daran habe ich auch meine Zweifel, denn die Regeln sind äußerst kompliziert formuliert.), aber nicht anwenden kann, denn sie sind logisch falsch. Die logisch falsche Beschreibung beruht auf der Annahme von Eigenschaften, die für die Regeln irrelevant sind und auf unpräzisen Formulierungen wie *„in Verbindung mit entsprechenden Elementen des einleitenden Satzes"*. Welche Elemente? Und in welcher Hinsicht entsprechen diese nicht genannten Elemente den explizit genannten Eigenschaften?

Ich habe genau diese Grammatik als Beispiel ausgewählt, weil ich überzeugt bin, daß die Grammatik von Hans Wilhelm Klein und Hartmut Kleineidam wahrscheinlich die beste Lernergrammatik auf dem deutschen Markt ist, alle anderen mir bekannten weisen weit größere Mängel auf. Zur Ehrenrettung der beiden Autoren kann man vor allem anführen, daß die wirklichen Gründe zur Wahl des Subjonctifs fast alle erwähnt werden.

Unter didaktischen Gesichtspunkten kann man eine ziemlich treffende Regel formulieren.

1. Wenn im Deutschen im Relativsatz ein Konjunktiv Imperfekt oder ein Konditional oder eine Konstruktion mit „sollte" steht, dann steht im französischen Relativsatz ein Subjonctif oder ein Konditional.

2. Der Subjonctif kann nur stehen, wenn das Bezugswort des Relativsatzes ein unbestimmtes Nomen oder quelqu'un bzw. quelque chose ist, das Tempus des Verbs des Hauptsatzes präsentisch ist und wenn der Subjonctif hörbar verschieden vom Indikativ ist.

Unter dem ersten Punkt finden wir die Eigenschaft „hypothetisch" im Falle des Konjunktiv Imperfekt und des Konditionals und die Eigenschaft „wünschenswert (für den Sprecher)" im Falle der Konstruktion mit „sollte".

Unter dem zweiten Punkt finden wir die Eigenschaft „unbestimmt", wie sie oben bei Klein/Kleineidam unter „Beachte" nachträglich aufgeführt wird. Die Tempuseigenschaft des Verbs des Hauptsatzes fehlt in der Grammatik ebenso wie der wichtige Hinweis, daß der Subjonctif nur an Stelle eines Konditionals gewählt werden kann, wenn er auch als Subjonctif erkennbar ist.

Unter linguistischen Gesichtspunkten hätte die Regel große Ähnlichkeit, sie müßte aber deutlicher den Grad der Unbestimmtheit herausarbeiten, ebenso wie die Bedeutung des „sollte". Außerdem müßte es differenzierte Regeln zu der „kann" Bestimmung geben, die ich z.T. gar nicht leisten kann.

2 Wissenschaftstheorie und Regeln

2.1. Allgemeine Überlegungen

Regel A

Immer wenn wir eine Entscheidung treffen, müssen wir anschließend mit den Konsequenzen dieser Entscheidung leben.

Beispiel: Ron Sommer hat die Deutsche Telekom mit riesigen Investitionsentscheidungen hoch verschuldet, Konsequenz: Ron Sommer hat seinen Job verloren.

Regel B

Fast alle Entscheidungen haben keine Konsequenzen.

Beispiel: Alle Anwesenden sind heute morgen aufgestanden, Konsequenz: keine.

Regel C

Immer wenn wir keine Entscheidung treffen, hat das keine Konsequenzen.

Beispiel: Ich habe den Kreditvertrag nicht abgeschlossen, also habe ich keine Schulden.

Behauptung A

Die Regeln A bis C sind Quatsch, denn es gibt kein Leben ohne Entscheidungen und ohne die Folgen dieser Entscheidungen.

Es kommt nicht auf die Regel als solche, sondern auf die Qualität (Eigenschaften) der Entscheidung an, die wir treffen müssen.

Zwei Eigenschaften spielen dabei eine sehr große Rolle, nämlich: wichtig und richtig. Nur wichtige Entscheidungen halten wir für wirkliche Entscheidungen und nur wichtige und zu gleich falsche Entscheidungen haben das, was ich in den Behauptungen Konsequenzen oder Folgen genannt habe.

Behauptung B

Hieraus folgt, daß Regeln immer „wichtig" und „richtig" sein sollten.

Behauptung C

„Wichtig" hat etwas mit Konsens und allgemeiner Zustimmung zu tun, „richtig" hat etwas mit überprüfbar und „wahr – falsch" zu tun.

Die unter Beispiel 1 formulierte Regel, daß zwei Synonyme in jedem beliebigen Kontext wechselseitig austauschbar sind, ist falsch.

Die unter Beispiel 2 formulierten Regeln zum Gebrauch des Subjonctifs in französischen Relativsätzen halte ich für vollkommen unwichtig, außerdem ist sie falsch.

Die für die Theorie der generativen Grammatik grundlegende Annahme von Noam Chomsky, daß die Anzahl aller Sätze einer natürlichen Sprache unendlich ist, ist falsch, aber sehr wichtig.

Diese beiden **zentralen Eigenschaften** von Entscheidungen, Regeln und Annahmen sind offensichtlich nicht immer kompatibel.

Beispiel 1:

Die Annahme, daß sich die Sonne um die Erde dreht war für die katholische Kirche sehr wichtig, trotzdem war sie falsch.

Beispiel 2:

Die Annahme, daß das Universum „unendlich" ist, war für Newton sehr wichtig und für Einstein persönlich wichtig, trotzdem war sie falsch.

Obwohl Newton schon zu Lebzeiten von Kollegen darauf hingewiesen wurde, daß seine Gravitationstheorie nicht mit einem unendlichen Raum verträglich ist, hat er wider besseres Wissen behauptet, daß es im unendlichen Raum keinen Mittelpunkt gibt und deshalb auch keinen Gravitationskollaps Wider besseres Wissen deshalb, weil Newton ein mathematisches Genie war, wie es nur ein zweites zu seinen Lebzeiten gab, nämlich Leibniz, er also genau wußte, daß das Argument stichhaltig war. Newton hat durch seine Haltung in dieser Frage vor allem wegen seines Ansehens frühere Entwicklungen der Astronomie und möglicherweise auch anderer Wissensbereiche behindert.

Seit Newton haben immer wieder Astronomen und Astrophysiker vergeblich auf diesen Widerspruch hingewiesen, trotzdem hat Einstein in seine „allgemeine Relativitätstheorie" eine willkürliche Konstante eingebaut, um diesen Schönheitsfehler zu beseitigen, einen Fehler den er selbst als den größten Unsinn seines Lebens ansah. Einen zweiten großen Fehler, nämlich die Ablehnung der „Heisenberg'schen Unschärferelation", mit den Worten „Es ist anscheinend schwierig, Gott in die Karten zu sehen. Aber daß er würfelt ... kann ich keinen Augenblick glauben.", bekannt als „Gott würfelt nicht.", konnte er nicht mehr korrigieren, weil die technischen Erfolge der „Unschärferelation" erst nach dem Tode Einsteins erreicht wurden.

Beispiel 3:

Die Logik des gesunden Menschenverstands (unscharfe Logik oder fuzzy logic) ist die konsequente Weiterentwicklung der philosophischen Logik.

Diese Behauptung ist wahrscheinlich richtig, aber in vielen Wissenschaften darunter auch der Linguistik bis heute unwichtig.

Wenn eine so bedeutende Institution wie die katholische Kirche und so überragende Wissenschaftler wie Newton und Einstein solche Fehler begehen können, dann sollten wir uns zumindest oberflächlich mit den Grundlagen von „Wissenschaft" beschäftigen. Am Ende werden wir feststellen, daß uns das zwar auch nicht gegen Fehler dieser Art schützt, aber vielleicht schützt es uns vor der Überzeugung unfehlbar zu sein.

2.2. Geisteswissenschaft <> Naturwissenschaft

Zwischen Naturwissenschaft und Geisteswissenschaft besteht ein grundsätzlicher Unterschied, der im Prinzip nicht auflösbar ist.

Das wesentliche Merkmal der Naturwissenschaften ist, daß jede Erkenntnis unabhängig ist von dem Wissenschaftler, der diese Erkenntnis gewonnen hat. Man nennt diese Unabhängigkeit vom Menschen und damit verbunden die beliebige Wiederholbarkeit der Erkenntnis: Intersubjektivität (Objektivität). Im allgemeinen Sprachgebrauch werden Naturwissenschaft und Wissenschaft oft gleichbedeutend gebraucht.

Demgegenüber stehen die Geisteswissenschaften, deren Erkenntnisse normalerweise nicht objektiv sondern subjektiv sind, d.h. die Erkenntnis ist nicht unabhängig von dem Menschen, der sie gewinnt. Geisteswissenschaften sind Konsenswissenschaften, d.h. eine große Zahl von Fachleuten ist sich in Bezug auf die Richtigkeit der Lehrmeinung einig. Einen objektiven Beweis hierfür kann aber niemand erbringen. Die Bedeutung der geisteswissenschaftlichen Methoden wird in einem „verwissenschaftlichtem Zeitalter" wie heute meistens unterschätzt.

Ron Sommer ist nicht geflogen, weil man ihm nachweisen konnte, daß er falsche Entscheidungen getroffen hatte, sondern weil eine breite Mehrheit von Entscheidern auf diese Weise von den eigentlichen Problemen der Deutschen Telekom ablenken wollte.

Typische Naturwissenschaften sind
Physik • Chemie • Biologie • Geologie • Astronomie

Typische Geisteswissenschaften sind
Literaturwissenschaft • Rechtswissenschaft • Geschichte • Pädagogik • Philosophie

Einige Wissenschaften kann man nicht eindeutig zuordnen:

Die Mathematik wird den Naturwissenschaften zugeordnet, ist aber eine reine Geisteswissenschaft. Ihre Erkenntnisse betreffen fiktive Gegenstände, wie „Kreise", „Dreiecke", „Pyramiden" usw. oder setzen vernünftige, aber nicht beweisbare Grundannahmen voraus, „Axiome", die von allen Mathematikern anerkannt werden. Die „Reinheit" der Mathematik, die sie früher und heute in den Bereich des Mystischen oder sogar der Theologie brachte, beruht ausschließlich auf den gemeinsamen Grundannahmen.

Auch die Tatsache, daß die angewandte Mathematik in anderen Wissenschaften sehr gut verwendbar ist, ändert nichts an dieser Beurteilung. „Zahlen" gibt es in der Wirklichkeit nicht, sie sind ein Produkt unserer Fähigkeit zu abstrahieren.

Die Linguistik und die Psychologie werden den Geisteswissenschaften zugeordnet, verstehen sich aber in der Regel als Naturwissenschaft. Das hat damit zu tun, daß beide Wissenschaften sich mit geistigen Tätigkeiten und/oder Fähigkeiten des Menschen beschäftigen. Die angestrebte Erkenntnis ist aber eine objektive Erkenntnis, auch wenn sie in beiden Wissenschaften sehr schwierig zu erreichen ist, denn erstens ist allein die Biologie unseres Gehirns so gut wie unerforscht und zweitens ist unser Gehirn nicht leer, es enthält Milliarden von Informationen, von denen wir nicht wissen, wo sie gespeichert, und wie sie untereinander verbunden sind. Diese Tatsache führt dazu, daß man je nach Gesichtspunkt und angewandten Methoden zu vollkommen unterschiedlichen Ergebnissen kommen kann, woraus wiederum folgt, daß es in beiden Wissenschaften verschiedene Schulen gibt.

Ökonomie, Meteorologie und Medizin gelten als Naturwissenschaften, genügen aber nicht dem Kriterium der Intersubjektivität.

So ist der sogenannte Doppelblindversuch in der Medizin kein naturwissenschaftliches Beweisverfahren, weil er nicht mit denselben Versuchspersonen wiederholbar ist, und wirtschaftlichen Prognosen sind nicht besser als die Wettervorhersage, weil die benötigten Datenmengen so groß sind, daß entweder eine Berechnung länger dauert als der Zeitraum der Vorhersage oder so groß ist, daß man sie unmöglich erfassen kann.

Die Entscheidungen Ron Sommers können gar nicht als „falsch" oder „richtig" in einem naturwissenschaftlichen Sinn beurteilt werden, weil der Versuch „Deutsche Telekom" nicht wiederholbar ist. Wird „T-Mobile USA" in der Zukunft ein Erfolg, so wäre dieser ohne die Entscheidung Ron Sommers nicht möglich gewesen, wird es ein Flop, kann Ron Sommer darauf hinweisen, daß man ihm keine Gelegenheit gegeben hatte, seine Entscheidungen zum Erfolg zu führen.

Doch auch in den Naturwissenschaften ist die Sache nicht so einfach, wie sie scheinbar aussieht. Die Annahme der katholischen Kirche, daß sich die Sonne um die Erde dreht, konnte man bis zur Gravitationslehre Newtons sehr wohl naturwissenschaftlich nachweisen, und der Beweis war sehr überzeugend.

- Beweis

Tag und Nacht entstehen durch eine Drehung der Erde um sich selbst. Dann dreht sich die Erde am Äquator mit ca. 1.640 km/h um sich selbst.

Bei einer so hohen Drehgeschwindigkeit müssen extrem starke und permanente Stürme entstehen.

Diese Stürme kann man aber nicht beobachten, also dreht sich die Erde nicht um sich selbst.

Dieser naturwissenschaftlichen Widerlegung des heliozentrischen Systems konnte man 150 Jahre nichts als seine Überzeugung entgegen halten. Galileis „Und sie dreht sich doch !!" war eine Überzeugung, eine intuitive, aber unbeweisbare Wahrheit.

2.3. Beobachten | Kontrast | Abstraktion | Messen | Maß | Einheit

- Jede Erkenntnis beruht auf einer Beobachtung !!!

Nur Gegenstände, Sachverhalte, Eigenschaften, Beziehungen etc., die man wahrnehmen kann, kann man auch beschreiben und daraus Erkenntnisse gewinnen. Dies ist das Glaubensbekenntnis der Naturwissenschaft. Deshalb wird z.B. die Homöopathie niemals als Naturwissenschaft akzeptiert werden, auch wenn sie noch so viele Heilerfolge hat. Denn die Eigenschaften einer D30 Potenz eines Wirkstoffs sind nicht mehr wahrnehmbar: die Wahrscheinlichkeit ein einziges Molekül des ursprünglichen Wirkstoffs wie Belladonna in dem Fläschchen anzutreffen ist so klein, daß sie nicht mehr meßbar ist.

Hier muß man zwei wesentliche Einwände machen, nämlich erstens aus der Tatsache, daß wir etwas nicht beobachten können, kann man nicht schließen, daß dieses Etwas nicht existiert, zweitens jede Beobachtung, wirklich jede Beobachtung gewinnen wir unter zu Hilfenahme unserer Sinnesorgane. Diese Sinnesorgane sind aber biologischer Natur, d.h. wir haben sie, um möglichst heil durch unser so kostbares Leben zu kommen, nicht aber um „Quarks" und „Antiquarks" zu betrachten.

- Zwei makabre Beispiele frei nach Benjamin Lee Whorf

  Wie leer ein leerer Benzinkanister ist, wissen wir dann, wenn er explodiert ist.
  Wie alt eine Raumfähre ist, wissen wir dann, wenn sie nicht mehr heil zurückkommt.

Aus der biologischen Einschränkung folgt, daß jede Wahrnehmung durch unseren Körper interpretiert wird, weil die Wahrnehmung eben nicht unmittelbar ist, sondern mittelbar mit Hilfe unseres Körpers. Hieraus folgt übrigens auch, daß eine absolute Objektivität in den Naturwissenschaften nicht möglich ist, d.h. auch die Naturwissenschaftler sind an ihren Körper gebunden, und wir sprechen besser von Intersubjektivität. Hieraus folgt außerdem zwingend, daß naturwissenschaftliche Erkenntnisse trotz aller Intersubjektivität falsch sein können. Absolute Wahrheit kann es nur in Geisteswissenschaften geben, wie z.B. in der Logik oder der Mathematik, solange die Erkenntnisse nicht in die Wirklichkeit übertragen werden.

Denn zwei Tomaten sind nicht die Summe von einer Tomate und noch einer Tomate, wie jeder Einkaufende im Supermarkt weiß, der solange Tomaten aus der Kiste nimmt, bis er genau die zwei richtigen Tomaten gefunden hat.

- Albert Einstein

„Insofern die Gesetze der Mathematik sich auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit."

- Eine für viele von uns schmerzliche Anekdote

Kurz nach dem zweiten Weltkrieg hat ein Lebensmittelchemiker den Eisengehalt verschiedener Gemüsesorten gemessen und dabei ermittelt, daß in Spinat zehnmal mehr Eisen ist als in jedem anderen Gemüse. Diese „wissenschaftliche" Erkenntnis hat dazu geführt und führt mit Sicherheit auch heute noch dazu, daß man kleine Kinder kräftig mit Spinat füttert, wegen des notwendigen, weil blutbildenden Eisens. Tatsache ist aber, Mitte der siebziger Jahre bei einer Kontrollmessung hat man festgestellt, daß Spinat keinesfalls mehr Eisen enthält als jedes andere banale Gemüse. Diese Geschichte ist noch keine Anekdote, aber Spinat enthält einen hohen Anteil an Blausäure, der uns Erwachsenen nichts ausmacht, viele Kinder aber vergiftet (ihnen wird übel, sie fühlen sich unwohl), die deshalb intuitiv den Genuß von Spinat ablehnen, ebenso wie den von Pilzen, aus dem gleichen Grund übrigens. Der Konflikt ist vorprogrammiert, abertausende von kleinen Kindern sind sinnloser Weise von Ihren Eltern mit Spinat gequält worden, wegen eines Irrtums oder einer bewußten Irreführung.

2.4. Einige Beispiele für verfälschte Wahrnehmung

Unsere Sinnesorgane zeigen uns jeden Tag, daß die Sonne im Osten aufgeht und im Westen untergeht, d.h. die Sonne dreht sich um die Erde.

Eine nette Kollegin sagte einmal: „Je dis jamais la négation sans ne."

Eine Studentin im gleichen Ton: „Ich sach überhauptnich nich ohne te".

Das Gesetz vom freien Fall besagt, daß alle Körper unabhängig von ihrer Größe, Gewicht, Form etc. alle gleich schnell zur Erde fallen. Lassen Sie einmal ein Blatt Papier und einen Kugelschreiber gleichzeitig los, kommen beide wirklich zugleich an ?

Jede Flüssigkeit fließt immer nach unten. Stecken Sie mal ein Stückchen Zucker zur Hälfte in eine Tasse Kaffee, der Kaffee fließt nach oben.

Wie leert man ein Aquarium, ohne die Fische zu ermorden ?

Warum ist der Mond größer, wenn er auf- oder untergeht ? Die Sonne übrigens auch.

Die häufige Antwort darauf: „... weil er näher dran ist." ist leider falsch, denn er ist sogar weiter weg. Andere Antwort: „... weil das Licht gebrochen wird." ist z.T. richtig, aber der wahre Grund ist, daß uns, als ehemaligen Baumbewohnern, alles was hoch ist, besonders weit weg erscheint und damit besonders gefährlich, denn ein Sturz vom Dach des Regenwaldes war immer tödlich.

Die übertriebene Wahrnehmung von Höhe dient also unserer Lebenserwartung. Ein Tisch ist ungefähr 75 cm hoch, das entspricht einer Schrittlänge, springen wir genauso leicht vom Tisch, wie wir einen Schritt machen ?

Aus diesen Beispielen sollten Sie eine wichtige Erkenntnis ziehen

Jede Wahrnehmung kann verfälscht sein, zumindest wird sie interpretiert.

Eine weitere Erkenntnis zur Wahrnehmung ist die folgende, die so banal erscheint, daß man gar nicht darüber nachdenkt, große Entdeckungen verdanken aber gerade dieser Erkenntnis ihre Existenz.

- Jede Wahrnehmung setzt einen Kontrast voraus.

●

Unter dem schwarzen Fleck verbirgt sich ein Buchstabe, welcher ? Es gibt keine Antwort auf diese Frage, ohne daß man einen Kontrast schafft, z.B. durch eine chemische Analyse dieses Pa-

piers. Der Dopingsünder, dessen Wirkstoff man nicht nachweisen kann, gilt als clean, auch wenn er nur ein bißchen schlauer ist, als es Ben Johnson 1988 war.
Eine der entscheidenden wissenschaftlichen Fragen ist oft: Wie kann man etwas nachweisen, was man schon lange vermutet, d.h. wie kann man einen Kontrast schaffen.

Wenn man mit Kontrasten arbeitet, eine unumgängliche Notwendigkeit, folgt sofort die nächste Notwendigkeit.

2.5. Messen und Maße

Wie breit sind die Tische hier im Unterrichtsraum? Sie sagen 1m oder 1,20m oder sogar 1,50m? Das ist kein Messen, was Sie da tun, das nennt man schätzen und ist sehr unwissenschaftlich. Wenn man messen will, dann braucht man ein Maß.

Sie arbeiten zwar gedanklich mit einem Metermaß, da Sie aber leider keines in der Tasche haben, müssen Sie zu einem anderen Maß greifen.

Boule Spieler messen oft mit den Boulekugeln, ein Maß, das seinen Zweck erfüllt. Die Tische hätten Sie z.B. mit Ihren Schuhen oder Händen messen können.

Ihr Einwand ist offensichtlich, dann kommt jeder zu einem anderen Ergebnis, das stimmt bezüglich der Zahl, einmal erhalten wir vier Schuhlängen, einmal fünf, aber das Ergebnis ist trotzdem richtig, denn das Ergebnis ist eben nicht vier oder fünf, sondern vier Schuhlängen von Georg und fünf von Sabine. Jeder kann mit Sabines Schuh das Ergebnis überprüfen, er wird immer wieder zum selben Ergebnis kommen. Das ist wissenschaftlich, auch wenn es komisch klingt.

Natürlich haben Sabines Schuhe einen großen Nachteil, sie sind nicht verfügbar, wenn ich bei mir zu Hause die Länge meiner Küche messen will. Das bedeutet, daß genormte Maße wie z.B. das Metermaß einen gewaltigen Fortschritt für die Wissenschaft bedeutet haben. Trotzdem Newton lebte vor der Definition des Meters.

- Jede Wissenschaft mißt und benötigt deshalb Maße auch die Linguistik

Diese Maße sind in der Regel von der Wissenschaft abhängig, die die Maße benutzt. Außerdem haben viele Wissenschaften ganze Maßsysteme, wie z.B. Millimeter, Dezimeter, Meter, Kilometer.

2.6. Wie genau wird gemessen?

Auch die Genauigkeit des Messens ist nicht grundsätzlich einheitlich, sondern von dem jeweiligen Bedarf abhängig. So werden Möbelstücke Millimeter genau produziert, das Ventilspiel eines Motors aber auf den Zehntelmillimeter genau. Wenn man einen Teppichboden für das Wohnzimmer kaufen will und nur jeweils zwei Seiten des Zimmers mißt, denn es ist ja ein Rechteck, kann böse überrascht werden, denn im Hochbau sind 2% Unterschied innerhalb der Toleranz des Gewerbes, das bedeutet einen Unterschied von bis zu 8 Zentimetern auf vier Meter Länge.

Im Straßenverkehr wird sich niemand beschweren, wenn es von Dortmund nach Frankfurt 247 km sind, statt der angezeigten 243. Auch die Übertragung ökonomischer Ergebnisse in die wirtschaftliche Praxis setzt ein anderes Maß an Genauigkeit voraus. Wenn ich alle Faktoren der Preisbildungstheorie berücksichtigen will, ist die Ware meistens schon ausverkauft oder die Faktoren haben sich zwischenzeitlich geändert. Es ist immer besser, wenig richtig zu können als vieles gar nicht, zumindest im richtigen Leben.

2.7. Abstraktion

Zum Schluß dieses Ausflugs in die Theorie von der Wissenschaft möchte ich die Abstraktion als Methode noch einmal besonders behandeln, denn „messen" ist einfach, klar und selbstverständlich, was bedeutet aber Abstraktion ?

Ich habe oben das Gesetz vom freien Fall erwähnt und gesagt, daß es offensichtlich unserer Erfahrung widerspricht, denn wenn ein Blatt Papier aus dem dreizehnten Stock eines Hochhauses

auf die Erde fällt, bleibt es unbeschädigt, obwohl es doch so empfindlich ist, wenn wir aber aus demselben Stockwerk springen, trauern die Erben. Irgend etwas stimmt also nicht mit dem Gesetz vom freien Fall.

Nun wir müssen zunächst von der, die Erde umhüllenden Luft, abstrahieren, d.h. so tun als wäre diese nicht da (auch wenn sie da ist). Dann werden wir feststellen, daß wir von weiteren Eigenschaften abstrahieren müssen, nämlich von der Tatsache, daß nicht nur die Erde den Kugelschreiber anzieht, sondern auch dieser die Erde und zwar mehr als das Blatt Papier.

Diese Darstellung ist allgemein verbreitet, entspricht aber nicht der Relativitätstheorie von Einstein. Der Unterschied ist aber für das Gemeinte unerheblich.

Auch mit extremen Hochgeschwindigkeitskameras kann man das nicht mehr messen, aber aus dem allgemeinen Gravitationsgesetz, daß alle Körper sich gegenseitig anziehen, kann man das schließen und sogar berechnen. Doch selbst wenn man hiervon ebenfalls abstrahiert, können das Blatt Papier und der Kugelschreiber nicht zur gleichen Zeit am selben Ort sein und zu verschiedenen Zeiten sowieso nicht, weil das Universum permanent in Bewegung ist, d.h. das Gesetz vom freien Fall ist ein Konstrukt, es existiert gar nicht in unserer realen Welt. Trotzdem ist es nützlich und wird in vielen technischen Anwendung genutzt.

Ich habe hier die Abstraktion bewußt übertrieben weit getrieben, um auf eine Besonderheit des Wissenschaftsbetriebs an den Hochschulen hinzuweisen, mit dem Sie als Studierende leider immer wieder konfrontiert werden.

2.8. Abstraktion und Wissenschaftlichkeit

Unsere hochschulpolitische Landschaft begünstigt den Wissenschaftler, der etwas Neues produziert, das auch noch möglichst fehlerfrei sein soll. Hierzu gibt es einen sogenannten „Königsweg", man denke sich etwas Absurdes aus, z.B. „Das Einkaufsverhalten der Deutschen nach 21 Uhr und dessen Konsequenzen für den DAX." , baue darauf eine so abstrakte Theorie, daß sie möglichst niemand versteht oder wenn doch, dann zumindest so, daß sie in sich widerspruchsfrei ist.

Das beste ist, man erzeugt eine große Menge von Tautologien. Tautologien sind Aussagen, die „an sich" wahr sind, d.h. niemals widerlegt werden können. Das ist zwar besonders praktisch für die Karriere des Wissenschaftlers, nicht aber für die Gesellschaft, die seine Tätigkeit bezahlt, denn Tautologien sind außer in Beweisverfahren vollkommen wertlos.

Eine schöne Tautologie ist z.B. die folgende: „Morgen scheint die Sonne oder sie scheint nicht.", wissenschaftlich formuliert sieht das schon ganz anders aus:

E=(A AND B) OR NOT (C AND D) mit A=D AND B=C, aber es bleibt sinnlos.

Ich will hiermit nicht gegen die Methode der Abstraktion sprechen, sie ist nützlich und bewährt sich täglich, aber in Europa scheint mir die Verantwortung des Wissenschaftlers für sein Tun gegen über der Gesellschaft wenig ausgeprägt, nicht die Lerner sind für die Lehrenden da, sondern umgekehrt.

2.9. Übergeneralisierung

Nicht wissenschaftlich geschulte Menschen ihrerseits haben eine natürliche Tendenz ihre eigenen Erfahrungen für die Wahrheit schlechthin zu halten. So nach dem Motto „Alle Ausländer essen Knoblauch und stinken danach.", oder „Alle Italiener sind feurige Liebhaber und alle Schweden Säufer und alle Deutsche besserwisserisch."

- Nützlichkeit

Die wahre Kunst der wissenschaftlichen Tätigkeit besteht darin, allgemein gültige, aber auch nützliche Erkenntnisse zu suchen und zu finden. Der Wissenschaftler muß sich seiner Verantwortung denjenigen gegenüber, die seine Tätigkeit bezahlen, bewußt sein und hierfür Rechenschaft

ablegen, auch wenn man natürlich nicht im Voraus weiß, ob der eingeschlagene Weg zum Ziel führt.

Ich setze voraus, daß nach dieser Darstellung allen klar ist, daß Nützlichkeit kein Wert an sich ist, sondern „Etwas ist für jemanden, an einem bestimmten Ort und zu einer bestimmten Zeit nützlich." Und ist deshalb für jemand anders möglicherweise schädlich.

- Nützlichkeit läßt sich nicht naturwissenschaftlich beweisen.

3 Die Traditionelle Logik

3.1. Die Aristotelische Logik

Aristoteles gilt als Begründer der klassischen, syllogistischen Logik. Ein Syllogismus ist ein logischer Schluß, der auf Aussagen der folgenden vier Formen basiert (A und B sind sprachliche Begriffe).

„Alle As sind gleich B"	(Für alle A gilt A = B)
„Alle As sind verschieden von B"	(Für alle A gilt A ≠ B)
„Einige As sind gleich B"	(Es gibt ein A und A = B)
„Einige As sind verschieden von B"	(Es gibt ein A und A ≠ B)

- Definition 1 des Syllogismus

Ein logischer Schluß besteht aus zwei Voraussetzungen (Prämissen) und der Konklusion, wobei jede Prämisse einen Begriff mit der anderen Prämisse und einen Begriff mit der Konklusion gemeinsam hat.

- Beweis 1: Aristoteles ist sterblich

Prämisse 1:	Alle Menschen (A)	sind sterblich (B).
Prämisse 2:	Aristoteles (C)	ist ein Mensch (A).
Konklusion:	Aristoteles (C)	ist sterblich (B).

Der Form nach ist dieser Schluß korrekt gebildet, und die meisten Menschen stimmen auch der sachlichen Richtigkeit der Folgerung zu.

- Beweis 2: Aristoteles ist eine Frau

Prämisse 1:	Alle Menschen (A)	sind Frauen (B).
Prämisse 2:	Aristoteles (C)	ist ein Mensch (A).
Konklusion:	Aristoteles (C)	ist eine Frau (B).

Der Form nach ist dieser Schluß korrekt gebildet, aber die meisten Menschen stimmen der sachlichen Richtigkeit der Folgerung nicht zu (unabhängig davon, ob Aristoteles nun ein Mann oder eine Frau war), wie der folgende Schluß zeigt.

- Beweis 3: Meine Katze ist sterblich

Prämisse 1:	Alle Menschen (A)	sind sterblich (B).
Prämisse 2:	Meine Katze (C)	ist ein Mensch (A).
Konklusion:	Meine Katze (C)	ist sterblich (B).

Der Form nach ist auch dieser Schluß korrekt gebildet, aber die meisten Menschen stimmen der sachlichen Richtigkeit der Folgerung nicht zu, obwohl sie der Richtigkeit der Konklusion zustimmen würden.

Definition 2 des Syllogismus

Ein Syllogismus ist dann und nur dann ein gültiger Schluß, wenn er formal richtig gebildet ist und wenn beide Prämissen wahr sind.

Beweis 4: Meine Katze ist ein Mensch

Prämisse 1:	Alle Menschen (A)	sind sterblich (B).
Prämisse 2:	Meine Katze (C)	ist sterblich (B).
Konklusion:	Meine Katze (C)	ist ein Mensch (A).

Beide Prämissen sind wahr, der Form nach ist der Schluß korrekt gebildet, trotzdem werden die meisten Menschen den Schluß ablehnen. Wir müssen also stärkere Forderungen an die Form stellen. Eine Lösung wäre zu fordern, daß der zweite Begriff der zweiten Prämisse immer gleich dem ersten Begriff der ersten Prämisse ist.

Beweis 5: Meine Katze ist ein Mensch

Prämisse 1:	Sterblich (A)	ist der Mensch (B).
Prämisse 2:	Meine Katze (C)	ist sterblich (A).
Konklusion:	Meine Katze (C)	ist ein Mensch (B).

Beide Prämissen sind wahr, der Form nach ist der Schluß korrekt gebildet, trotzdem werden die meisten Menschen den Schluß ablehnen. Wir müssen also stärkere Forderungen an die inhaltliche Beziehung von A und B stellen.

Notwendige Form des Syllogismus

Prämisse 1:	A	ist Teilmenge von B
Prämisse 2:	C	ist Teilmenge von A
Konklusion:	C	ist Teilmenge von B

Definition 3 des Syllogismus

Ein Syllogismus ist dann und nur dann ein gültiger Schluß, wenn er formal richtig gebildet ist, d.h. der notwendigen Form genügt und wenn beide Prämissen wahr sind. Diese Form nennt man Transitivität oder Übertragbarkeit.

Da die Transitivität eine nicht beweisbare, aber allgemein akzeptierte Eigenschaft (ein Axiom) ist, brauchen wir uns um die Form des Syllogismus nicht mehr kümmern. Was uns bleibt ist die Wahrheit der Prämissen.

3.2. Syllogismus: Form und Inhalt

Wenden wir uns noch einmal dem klassischen Beispiel zu:

Beweis 1: Aristoteles ist sterblich

Prämisse 1:	Alle Menschen (A)	sind sterblich (B).
Prämisse 2:	Aristoteles (C)	ist ein Mensch (A).
Konklusion:	Aristoteles (C)	ist sterblich (B).

„sterblich" definiert die Menge aller „sterblichen Objekte". Da wir Mengen entweder durch eine gemeinsame Eigenschaft ihrer Elemente (induktiv) oder durch Aufzählung (deduktiv) bestimmen können, sollte es doch leicht möglich sein, diese Menge zu bestimmen.

Aber eine Aufzählung der oben definierten Menge ist aus vielen Gründen prinzipiell unmöglich. So ist die Menge „aller Menschen, die bei einem Flugzeugabsturz in diesem Jahr sterben werden" mit Sicherheit eine Teilmenge der Menge der „sterblichen Objekte", aber nicht aufzählbar, damit ist aber auch die Menge der „sterblichen Objekte" nicht aufzählbar.

Was uns bleibt ist die induktive Methode, d.h. wir müssen die Eigenschaft „sterblich" so definieren, daß wir für jedes beliebige Objekt sagen können, ob es sterblich ist oder nicht, das ist aber schwieriger als es aussieht, wenn man ins Detail geht, selbst wenn wir die Eigenschaft „sterblich" auf Lebewesen beschränken.

Auf den ersten Blick entgeht uns zunächst einmal die Zweideutigkeit der Eigenschaft „sterblich", denn „sterblich" heißt erstens „kann sterben" und zweitens „wird sterben".

Wir glauben fest, daß man jedes Lebewesen vom Leben zum Tode befördern kann, daß also jedes Lebewesen sterben kann. Nun seit mehr als 20 Jahren versuchen wir das AIDS-Virus zu töten, aber bisher ohne Erfolg und selbst wenn uns das eines Tages gelingen sollte, gibt es keinen Grund zu der Annahme, daß es nicht andere Lebewesen gibt, bei denen uns das niemals gelingen wird.

Mit dem „sterben werden" ist die Sache noch komplizierter. Unabhängig davon, daß sehr viele Menschen glauben, daß „Jesus lebt", daß wir immer wiedergeboren werden, daß wir im Paradies weiter leben werden und viele weitere Spielarten dieser Gedanken, haben wir keinen naturwissenschaftlichen Nachweis dafür, daß alle heute lebenden Menschen sterben werden, noch haben wir einen naturwissenschaftlichen Nachweis darüber, daß Aristoteles wirklich gestorben ist. Vielleicht beruht der Film „Highlander" bezüglich der Unsterblichkeit auf Wahrheit und die Unsterblichen leben unter uns.

Trotz all dieser Probleme sind wir fest davon überzeugt, daß wir „sterblich" sind und daß wir uns durch diese Sterblichkeit von den Göttern (oder Gott) unterscheiden. Niemand zweifelt ernsthaft an seiner Sterblichkeit (dafür sorgt schon unser biologisches Erbe), aber wirklich beweisen können wir es nicht. Diese Schwäche in der Beweiskraft des Syllogismus ist den Menschen natürlich nicht verborgen geblieben, sondern zieht sich wie ein roter Faden durch die gesamte menschliche Philosophie. Auf der einen Seite die Ideenlehre Platos, der aus der Unvollkommenheit des Seins, dieses Sein aus vollkommenen Ideen ableitet, auf der anderen Seite die Einteilung der Wirklichkeit in Kategorien durch Aristoteles und seine Berufung auf den gesunden Menschenverstand.

3.3. Die Axiome des Aristoteles

Um die Wirklichkeit in Kategorien, Klassen oder nicht willkürliche Mengen einzuteilen braucht Aristoteles zwei Axiome.

Axiom

Ein Axiom ist eine so offensichtliche Wahrheit, daß man sie ohne Beweis akzeptieren kann.

Der Satz vom Widerspruch

A kann nicht zugleich B und *nicht* B sein.

Wenn A Teilmenge von B ist, dann kann A nicht Teilmenge des Komplements von B sein.

Eine Amsel kann nicht zugleich ein Vogel und *kein* Vogel sein.

Diese Einteilung der Wirklichkeit in Kategorien ist eine so offensichtliche Wahrheit, weil sie biologisch bedingt ist. Selbst „primitive Lebewesen" teilen die Wirklichkeit in Kategorien ein, weil das einen evolutionären Vorteil bringt. Es ist für eine Raupe sinnlos darüber nachzudenken, ob die Amsel ein Vogel oder ein Dinosaurier ist, denn bevor sie das entschieden hätte, wäre sie schon aufgefressen, und falls es tatsächlich solche Raupen gegeben haben sollte, sind diese längst ausgestorben.

Auf der anderen Seite führt diese Art des Denkens zu falschen Schlüssen, wie dem folgenden:

Schluß 1

Alle Dinosaurier sind ausgestorben.

Wenn die Vögel die direkten Nachkommen von Dinosauriern sind, dann sind einige Arten von Dinosauriern ausgestorben, aber nicht alle. Die Dinosaurier, die nicht ausgestorben sind, nennen wir nur „Vögel".

- Schluß 2

Alle Dinosaurier sind durch einen Meteoreinschlag ausgestorben.

Warum ist dieser Schluß falsch?

- Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten

A ist entweder B oder A ist *nicht* B.

A ist entweder Teilmenge von B oder Teilmenge des Komplements von B

Eine Amsel ist entweder ein Vogel oder *kein* Vogel.

Dieser Satz vom ausgeschlossenen Dritten ist ein ganz wichtiges Beweismittel nicht nur in den Wissenschaften, sondern auch in der Rechtsprechung, dort heißt es „schuldig" oder „nicht schuldig", es gibt dort nicht so etwas wie ein „bißchen schuldig".

Beide Axiome des Aristoteles beziehen sich auf Gegensätze, aber in unterschiedlicher Weise. Der Satz vom Widerspruch besagt, daß etwas nicht zugleich „wahr" und „*nicht* wahr" sein kann, er bestimmt die scharfe Einteilung der Wirklichkeit in Kategorien, die weitgehend mit unserer sprachlichen Einteilung übereinstimmt. Da wo das nicht der Fall ist, müssen wir das unseren Kindern immer wieder einschärfen, denn ein „Walfisch" ist kein Fisch sondern ein Säugetier und dort wo verschiedene Sprachen die Wirklichkeit unterschiedlich einteilen, haben wir die größten Lernprobleme.

Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten zwingt uns, eine Entscheidung zwischen „wahr" und „*nicht* wahr" zu treffen (deshalb bin ich kein Richter geworden).

- Das Dilemma des ausgeschlossenen Dritten

Wenn ich z.B. behaupte, daß die Dinosaurier nicht ausgestorben sind, dann werde ich mit der Aufforderung konfrontiert, einen lebenden Dinosaurier vorzuführen. Wenn ich dann auf eine Amsel zeige, lacht man mich einfach aus.

- Die SKL (Süddeutsche Klassenlotterie) behauptet

Prämisse 1: Mit einer bestimmten Kombination von Losen habe ich eine Gewinnchance von 97,5%.

Prämisse 2: Der Höchstgewinn beträgt 10 Millionen Euro.

Konklusion: Bei der SKL kann man eigentlich nur gewinnen.

Kaufe ich z.B. 1/10 Lose in der bestimmten Kombination, kann ich bis zu 1 Millionen Euro gewinnen. Indirekte falsche Schlußfolgerung: die Chance zu verlieren beträgt nur 2,5% und der mögliche Gewinn ist hoch. Was hat die Werbung der SKL mit dem ausgeschlossenen Dritten zu tun?

Ein Schausteller auf der Kirmes behauptet: „Jedes Los gewinnt." Und tatsächlich für jedes Los erhält man einen Gewinn. Wie ist es möglich, daß der Losverkäufer trotz seiner regelmäßigen Verluste immer noch im Geschäft ist und daß die meisten Gewinner sich nicht als Gewinner fühlen.

In allen diesen Fällen sind wir Opfer eines falschen Axioms, das von uns fordert, nur zwischen Gewinn und *nicht* Gewinn zu unterscheiden und deshalb verlieren fast alle bei der SKL und auf der Kirmes, obwohl fast alle gewinnen. Das sieht zwar paradox aus, ist es aber keineswegs.

Betrachten wir das ganze einmal wirtschaftlich, dann ist der Loskauf so etwas wie eine Investition und ein Gewinn entsteht erst dann, wenn die Investition vollständig zurückgeflossen ist (RTI), d.h. betriebswirtschaftlich gesehen ist der Losgewinn zunächst einmal nur ein Geldfluß, aber noch kein Gewinn, erst wenn der Geldfluß die ursprüngliche Investition übersteigt, spricht man betriebswirtschaftlich von Gewinn.

Bei der SKL kann man tatsächlich mit einer Chance von 97,5% einen Geldfluß erzielen, doch mit einer noch größeren Wahrscheinlichkeit ist dieser Geldfluß geringer als die ursprüngliche Investition, d.h. der Preis für ein solches Kombi Los ist zu 99,9999 % höher als der ausbezahlte Gewinn, und auf der Kirmes steht der Wert des Losgewinns in keinem Verhältnis zum Lospreis. Nach dem Axiom vom ausgeschlossenen Dritten sollte es aber nur Gewinner geben. Tatsächlich gibt es aber nur wenige Gewinner, zunächst die SKL und den Schausteller und einige wenige, die das große Los ziehen.

- Fazit

Ich habe bei der SKL gewonnen, kann auf verschiedene Art wahr und *nicht* wahr sein.

100 %	Ich habe den Hauptpreis gewonnen.
80 %	Ich habe sehr viel mehr gewonnen, als ich für das Los bezahlt habe.
60 %	Ich habe etwas mehr gewonnen, als ich für das Los bezahlt habe.
40 %	Ich habe genauso viel gewonnen, wie ich für das Los bezahlt habe.
30 %	Ich habe etwas weniger gewonnen, als ich für das Los bezahlt habe.
20 %	Ich habe weniger gewonnen, als ich für das Los bezahlt habe.
10 %	Ich habe viel weniger gewonnen, als ich für das Los bezahlt habe.
0 %	Ich habe noch nie gewonnen (aber gelogen).

Die Zahlen vor den Aussagen sollen zeigen, zu wieviel Prozent ich persönlich die Aussagen für „wahr" halte, die SKL meint, daß alle von 100% bis zu 10% Gewinner sind.

Trotzdem habe auch ich mich persönlich sehr lange gefragt, wo nur mein Denkfehler sein könnte, denn mir war schon klar, daß die SKL nicht die Caritas ist. Bis ich eines Tages die Gewinnquoten der SKL zu Gesicht bekam. Da ich mich nicht mehr genau an die Zahlen erinnern kann, gebe ich nur eine grobe Einschätzung: die SKL verspricht eine 97,5% Gewinnchance auf einen Mindestgewinn von 12€ bei einem monatlichen Lospreis von 25€ auf sechs Monate entsprechend 150€ Investition.

3.4. Die formale Logik

Mitte des19.Jahrhunderts haben die britischen Mathematiker George Boole und Augustus De Morgan eine andere Logik, die heute als formale oder symbolische oder moderne Logik bezeichnet wird, formuliert. Diese Logik wurde von dem deutschen Mathematiker Gottlob Frege und insbesondere von den britischen Mathematikern Bertrand Russell und Alfred North Whitehead in der Principia Mathematica (3Bde., 1910-1913) weiterentwickelt. Das logische System von Russell und Whitehead führt Symbole für Aussagen und ihre Bindeglieder (Operatoren) ein, wie z.B. für „oder", „und", „nicht" und „wenn... dann...". (nach Microsoft Encarta 2003) Der Endpunkt dieser Entwicklung bleibt dem deutschen Mathematiker David Hilbert vorbehalten, der Logik konsequenterweise „Metamathematik" nennt.

Obwohl viele Mathematiker des 19. Jahrhunderts und die meisten Philosophen bis heute noch auf der Überprüfung der Wahrheit von Aussagen bestehen, interessiert sich die formale Logik eigentlich nur noch für die Wahrheit bzw. Falschheit der Kombination von Aussagen, nicht aber für die Wahrheit oder Falschheit der Aussagen selber. Konsequenterweise findet man seit Russel auch keine realen Aussagen mehr, sondern nur noch Symbole für die Aussagen, deren Wahrheit natürlich nicht überprüft werden kann und auch gar nicht soll.

Das Dilemma der aristotelischen Logik bezüglich der Wahrheit einer Aussage wird durch eine Totaloperation beseitigt, d.h. man beseitigt die Aussage selber und ersetzt sie durch ein Symbol. Folgerichtig erhalten wir in der formalen Logik sogenannte Wahrheitstafeln.

- Wahrheitstafel des „und" Operators

Aussage A	Aussage B	A B
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

- Wahrheitstafel des „oder" Operators

Aussage A	Aussage B	A B
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

- Wahrheitstafel des „wenn - dann" Operators

Aussage A	Aussage B	Wenn A dann B
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

- Wahrheitstafel des „nicht" Operators

Aussage A	Aussage -A
W	F
F	W

Dieser Verzicht auf Inhalt führt zwar dazu, daß man sich nicht mehr um die Wahrheit einer Aussage streiten kann, aber doch zu einigen sehr absonderlichen Ergebnissen.

Die Implikation (wenn ..., dann) ist z.B. insgesamt „wahr", wenn beide Aussagen „falsch" sind.

Beispiel 1 für eine wahre Implikation

Wenn die Sonne rot gestreift ist, dann ist die Erde eine Orange.

Formal logisch gesehen ist die gesamte „Wenn ..., dann" Aussage „wahr", denn die Aussage „Die Sonne ist rot gestreift." und die Aussage „Die Erde ist eine Orange." sind beide falsch und die Implikation zweier falscher Aussagen ist insgesamt wahr. Das widerspricht aber dem gesunden Menschenverstand und damit der unmittelbaren Einsicht. In diesem Punkt widerspricht die formale Logik einem Grundprinzip der Aristotelischen Logik und läßt sich nur mit dem Konsens der Fachleute erklären.

Beispiel 2 für eine wahre Implikation

Wenn die Sonne rot gestreift ist, dann bin ich Günther Jauch.

Formal logisch gesehen ist die gesamte „Wenn ..., dann" Aussage „wahr", denn die Aussage „Die Sonne ist rot gestreift." und die Aussage „Ich bin Günther Jauch." sind beide falsch und die Implikation zweier falscher Aussagen ist insgesamt wahr. Das widerspricht in diesem Fall aber nicht dem gesunden Menschenverstand und damit auch nicht der unmittelbaren Einsicht. Denn eine solche Äußerung ist in einem bestimmten sprachlichen Kontext sehr wohl möglich und adäquat.

Die formale Logik verzichtet grundsätzlich auf die Überprüfung der Wahrheit von Aussagen und formuliert dafür Wahrheitstafeln, die aber teilweise nicht unmittelbar einsichtig sind, d.h. sie verzichtet auf das Grundprinzip der unmittelbaren Einsicht, das der Logik des Aristoteles zu Grunde liegt. Allerdings verzichtet sie nicht auf die beiden Axiome des Aristoteles, die dieser aus der unmittelbaren Einsicht gewonnen hatte, nämlich

Den Satz vom Widerspruch

A kann nicht zugleich B und nicht B sein.

Wenn A Teilmenge von B ist, dann kann A nicht Teilmenge des Komplements von B sein.

Den Satz vom ausgeschlossenen Dritten

A ist entweder B oder A ist nicht B.

A ist entweder Teilmenge von B oder Teilmenge des Komplements von B

Den Satz vom Widerspruch behält die formale Logik bei, weil sie nur zwei Wahrheitswerte zuläßt, nämlich „wahr" und „falsch", und den Satz vom ausgeschlossenen Dritten formuliert sie explizit in der „Negation", d.h. „Wenn A wahr ist, dann ist *nicht* A falsch und wenn A falsch ist, dann ist *nicht* A wahr.

In diesem Sinn ist die formale Logik der aristotelischen Logik klar unterlegen, das kann man auch sehr schön zeigen, in dem man den Syllogismus selbst formalisiert.

Sprachliche Form des Syllogismus

Wenn Prämisse 1 wahr und Prämisse 2 wahr, dann Konklusion wahr.

Wahrheitstafel des Syllogismus

Prämisse A	Prämisse B	A B		A B	Konklusion	Syllogismus
W	W	W		W	W	W
W	F	F		W	F	F
F	W	F		F	W	W
F	F	F		F	F	W

Man kann sofort erkennen, daß der Syllogismus wahr ist, wenn die Prämissen und die Konklusion wahr sind (wie erwartet), aber auch wenn die Konklusion unabhängig von den Prämissen falsch ist, was natürlich meistens schwachsinnig ist. Darüber hinaus haben wir auf einige sehr starke Annahmen des klassischen Syllogismus, wie z.B. die Teilmengen Beziehung verzichten müssen, weil wir die Inhalte der Aussagen nicht mehr überprüfen dürfen.

Letzter Syllogismus

Prämisse 1: Menschen brauchen für Entscheidungen, Regeln etc. Inhalte.

Prämisse 2: Die formale Logik verzichtet auf Inhalte.

Konklusion: Die formale Logik ist für Entscheidungen, Regeln etc. unbrauchbar.

Jeder beliebige Syllogismus ist mit Hilfe der formalen Logik nur falsch, wenn die Konklusion falsch ist und immer wahr, wenn nur die Konklusion wahr ist. Dann erübrigt sich aber jede Schlußfolgerung, jedes Urteil, jede Kritik. Das aber will ich hier gerade nicht behaupten, nämlich daß die formale Logik im Prinzip zum Aufstellen von Regeln „unbrauchbar" ist, obwohl der „letzte Syllogismus" diesen Schluß nahe legt.

Tatsächlich haben sich aber die Begründer der formalen Logik von Gottlob Frege über Bertrand Russel und Kurt Gödel sehr wohl um Inhalte gekümmert. Für Frege sollten die logischen Gesetze „Gesetze des Wahrseins" sein, und damit meint er nicht formal richtig gebildet, wie man aus seinem Vorwort zum ersten Band der *Grundgesetze* von 1893 zum für die Logik grundlegenden Unterschieds zwischen der Wahrheit und dem Fürwahrgehaltenwerden erfährt:

> Die logischen Gesetze sind Gesetze des Wahrseins, nicht solche des Fürwahrgehaltenwerdens: Wahrsein ist etwas anderes als das Fürwahrgehaltenwerden, sei es von Einem, sei es von Vielen, sei es von allen, und ist in keiner Weise darauf zurückzuführen. Es ist kein Widerspruch, dass etwas wahr ist, was von Allen für falsch gehalten wird. Ich verstehe unter logischen Gesetzen nicht psychologische Gesetze des Fürwahrhaltens, sondern Gesetze des Wahrseins. Wenn es wahr ist, dass ich dies am 13. Juli 1893 in meiner Stube schreibe, während draussen der Wind heult, so bleibt es wahr, auch wenn alle Menschen es später für falsch halten sollten. Wenn so das Wahrsein unabhängig davon ist, dass es von irgendeinem anerkannt wird, so sind auch die Gesetze des Wahrseins nicht psychologische Gesetze, sondern Grenzsteine in einem ewigen Grunde befestigt, von unserm Denken überfluthbar zwar, doch nicht verrückbar.

Das Wahrsein einer einzelnen Aussage im Sinne von Frege läßt sich prinzipiell nicht logisch nachweisen, wie Kurt Gödel 1931 nachgewiesen hat. Auf logische Fehler in seinem Konzept wurde Frege von Bertrand Russel aufmerksam gemacht, der desungeachtet den bis dahin ziemlich unbekannten Gottlob Frege erst der Fachwelt bekannt machte.

Der nachfolgende Text ist Bertrands Russel „Philosophie des Abendlandes" entnommen. Da das Buch im Laufe fast eines Lebens geschrieben wurde, sehe ich mich als Nichtfachmann leider nicht in der Lage, den Text beweiskräftig zu datieren (Bei einigen Kapiteln des Buches findet man Zeitangaben zur Abfassung des Kapitels, aber leider nicht bei diesem letzten, das in gewisser Weise eine Zusammenfassung der persönlichen Meinung von Russel ist.) Es kommt aber meiner Kenntnis der Person Bertrand Russels nach nicht so genau darauf an, weil Bertrand Russel ein außergewöhnlich bescheidener und auch selbstkritischer Mensch war. Ob Russel Kenntnisse über die „Logik des gesunden Menschenverstands" hatte, die noch zu seinen Lebzeiten publiziert wurde, ist mir nicht bekannt. In dem Text verweist er aber auf die Möglichkeiten einer „mehrwertigen Logik" und insbesondere zeigt er in dem Buch, daß es schon zur klassischen griechischen Zeit Versuche mit mehrwertiger Logik gegeben hatte. Vor allem aber zeigt der Text das Interesse Russels an dem „Inhalt von Aussagen", ein Interesse, das sich durch das gesamte Buch zieht, auch wenn er in seiner Kritik der traditionellen Logik immer von „falscher Syntax" bzw. „falscher Grammatik" spricht, gemeint ist dabei immer „falsche Semantik", d.h. „falscher Inhalt".

BERTRAND
RUSSELL

Philosophie des Abendlandes

Ihr Zusammenhang mit der politischen und der sozialen Entwicklung

EUROPAVERLAG
MÜNCHEN · WIEN

31. KAPITEL

Die Philosophie der logischen Analyse

Seit Pythagoras gab es in der Philosophie stets zwei gegensätzliche Richtungen: auf der einen Seite Männer, deren Denken vor allem von der Mathematik inspiriert war, auf der anderen diejenigen, die sich mehr von den empirischen Wissenschaften beeinflussen ließen. Plato, Thomas von Aquino, Spinoza und Kant gehören zu der Gruppe, die wir die mathematische nennen könnten; Demokrit, Aristoteles und die modernen Empiriker von Locke an rechnen zur Gegenpartei. In unserer Zeit ist eine philosophische Schule entstanden, die es sich zur Aufgabe gemacht hat, den Pythagoreismus aus den mathematischen Prinzipien auszuschalten und den Empirismus mit dem Interesse für die deduktiven Teile der menschlichen Erkenntnis zu verbinden. Worauf diese Schule hinauswill, ist weniger augenfällig als die Ziele der meisten Philosophen der Vergangenheit; einige ihrer Leistungen sind aber ebenso unangreifbar wie manche Errungenschaften der Wissenschaftler.

Der Ursprung dieser Philosophie ist in der Arbeit von Mathematikern zu suchen, die ihr Gebiet von Trugschlüssen und allen auf unsorgfältigem Denken beruhenden Fehlern zu reinigen begannen. Die großen Mathematiker des siebzehnten Jahrhunderts waren Optimisten, denen an raschen Ergebnissen lag; infolgedessen beließen sie es bei den unsicheren Grundlagen der analytischen Geometrie und der Infinitesimalrechnung. Leibniz glaubte an wirksame Infinitesimale, aber wenn dieser Glaube auch seiner Metaphysik entsprach, so war er doch nicht gründlich mathematisch fundiert. Bald nach der Mitte des neunzehnten Jahrhunderts bewies Weierstraß, daß sich der Kalkül ohne Infinitesimale aufstellen läßt, und verlieh ihm dadurch endlich logische Gewißheit. Dann kam Georg Cantor, der die Theorie der Stetigkeit und der unendlichen Zahl entwickelte. Vor seiner Definition war »Stetigkeit« ein vager Begriff gewesen, geeignet für Philosophen wie Hegel, der metaphysische Unklarheiten in die Mathematik einzuführen gedachte. Cantor gab dem Wort eine präzise Bedeutung und zeigte, daß Stetigkeit in seiner Definition der Begriff war, den Mathematiker und Physiker benötigten. Damit war ein großer Teil der Mystik überholt, darunter auch die Bergsonsche.

Cantor machte auch dem uralten logischen Kopfzerbrechen über die unendliche Zahl ein Ende. Sehen wir uns die Reihe der ganzen Zahlen von 1 aufwärts an; wie viele solche Zahlen gibt es? Ganz offensichtlich ist ihre Anzahl nicht endlich. Bis zu Tausend sind es tausend Zahlen, bis zu einer Million eine Million. Welche endliche Zahl man auch nimmt, stets muß es noch mehr Zahlen als diese geben, denn von 1 bis zu der betreffenden Zahl haben wir gerade die genannte Anzahl von Zahlen, und darüber hinaus gibt es weitere, die noch größer sind. Die Anzahl endlicher ganzer Zahlen muß also unendlich sein. Nun aber kommt etwas Sonderbares: Die Anzahl der geraden Zahlen muß die gleiche sein wie die Anzahl aller ganzen Zahlen. Sehen wir uns die beiden folgenden Reihen an:

1 2 3 4 5 6 ...

2 4 6 8 10 12 ...

Es stehen immer zwei Zahlen untereinander; deshalb muß die Zahl der Glieder in beiden Reihen die gleiche sein, obwohl die untere Reihe aus nur halb soviel Gliedern besteht wie die obere. Leibniz, der dies bemerkte, sah darin einen Widerspruch und schloß, daß es wohl unendliche Mengen, aber nicht unendliche Zahlen gäbe. Georg Cantor bestritt kühn, daß es sich um einen Widerspruch handle. Er hatte recht; es ist nur ein Kuriosum.

Georg Cantor definierte als »unendlich« eine Menge, deren Teile ebenso viele Glieder enthalten wie die ganze Menge. Auf dieser Basis vermochte er eine höchst interessante Theorie unendli-

cher Zahlen aufzubauen, womit er einen ganzen Bezirk, in dem zuvor Unklarheit und mystisches Dunkel geherrscht hatten, in den Bereich der exakten Logik einbezog.

Der nächste bedeutende Mann war Frege, der sein erstes Buch 1879 und seine Definition der »Zahl« 1884 veröffentlichte, aber trotz des epochemachenden Charakters seiner Entdeckungen keine Anerkennung fand, bis ich 1903 auf ihn aufmerksam machte. Bemerkenswert ist, daß vor Frege jede vorgeschlagene Definition der Zahl elementare logische Fehler aufwies. Es war üblich, »Zahl« mit »Anzahl« zu identifizieren. Aber ein Beispiel für »Zahl« ist eine bestimmte Zahl, etwa 3, und ein Beispiel für 3 ist eine bestimmte Dreiheit. Eine Dreiheit ist eine Anzahl, aber die Gattung aller Dreiheiten - welche Frege mit der Zahl 3 identifizierte - ist eine Anzahl von Anzahlen; und die Zahl im allgemeinen, für die 3 ein Beispiel darstellt, ist eine Anzahl von Anzahlen von Anzahlen. Der elementare grammatische Fehler, diese mit der einfachen Anzahl einer gegebenen Dreiheit zu verwechseln, machte die ganze Philosophie der Zahl vor Frege zu einem Konglomerat von »Unsinn« in des Wortes strengster Bedeutung.

Aus Freges Arbeit ergab sich, daß die Arithmetik und die reine Mathematik ganz allgemein nur eine Fortsetzung der deduktiven Logik sind. Damit war Kants Theorie widerlegt, daß arithmetische Sätze »synthetisch« seien und eine Beziehung zur Zeit einbegriffen. Die Entwicklung der reinen Mathematik aus der Logik wurde im einzelnen in den Principia Mathematica von Whitehead und mir dargestellt.

Allmählich stellte sich heraus, daß ein großer Teil der Philosophie sich auf etwas reduzieren läßt, was man als »Syntax« bezeichnen kann, wenn auch dieser Begriff hier in einem etwas weiteren Sinne als gewöhnlich anzuwenden ist. Einige Leute, vor allem Carnap, haben die Auffassung vertreten, alle philosophischen Probleme wären in Wirklichkeit syntaktische Probleme; wenn Fehler in der Syntax vermieden werden, ist jedes philosophische Problem damit entweder gelöst oder als unlösbar erkannt. Ich halte das für eine Übertreibung, und Carnap ist jetzt auch dieser Meinung; zweifellos aber ist eine philosophische Syntax bei traditionellen Problemen äußerst nützlich.

Wie nützlich sie ist, möchte ich durch eine kurze Erklärung der sogenannten »Beschreibungstheorie« veranschaulichen. Unter »Beschreibung« verstehe ich eine Wendung wie »Der gegenwärtige Präsident der Vereinigten Staaten«, wobei ein Mensch oder eine Sache nicht durch einen Namen, sondern durch eine Eigenschaft beschrieben wird, von dar man annimmt oder weiß, daß sie ihm oder ihr eigen ist. Aus solchen Wendungen ist viel Unklarheit entstanden. Angenommen, ich sage: »Der goldene Berg existiert nicht«, und man fragt, »Was existiert nicht?«, und ich antworte darauf: »Der goldene Berg«, so würde es ja so aussehen, als legte ich ihm eine Art von Existenz bei. Augenscheinlich behaupte ich damit etwas anderes, als wenn ich sage: »Das runde Quadrat existiert nicht.« Das scheint implizite zu besagen, der goldene Berg sei etwas anderes als das runde Quadrat, obwohl beide nicht existieren. Die Beschreibungstheorie war dazu bestimmt, mit solchen und ähnlichen Schwierigkeiten aufzuräumen.

Nach dieser Theorie verschwindet bei richtiger Analyse einer Aussage, die einen Ausdruck wie etwa »der So-und-So« enthält, der Ausdruck »So-und-So«. Nehmen wir beispielsweise die Feststellung »Scott war der Verfasser des Waverley«. Die Theorie interpretiert diese Feststellung folgendermaßen:

»Nur ein einziger Mann schrieb Waverley, und dieser Mann war Scott«, oder ausführlicher:

»Eine Wesenheit c ist so beschaffen, daß die Behauptung >x schrieb Waverley< nur richtig ist, wenn x gleich c ist; zudem ist c gleich Scott. «

Die Bedeutung des ersten Teils bis zu dem Wort »zudem« wird definiert als: »Der Autor von Waverley existiert (oder hat existiert oder wird existieren).« Somit bedeutet »der goldene Berg existiert nicht«: »Es gibt keine Wesenheit c, die so beschaffen ist, daß >x ist golden und bergig< nur dann richtig wäre, wenn x gleich c ist.«

Mit dieser Definition hat das Kopfzerbrechen über die Bedeutung der Aussage »Der goldene Berg existiert nicht« ein Ende.

»Existenz« kann nach dieser Theorie nur von etwas Beschriebenem ausgesagt werden. Wir können zwar sagen »Der Verfasser des Waverley existiert«, nicht aber »Scott existiert«, denn das wäre schlechte Grammatik oder vielmehr schlechte Syntax. Hierdurch wird mit einer zweitausend Jahre alten, bei Platos Theaitet beginnenden Unklarheit über die »Existenz« aufgeräumt.

Unter anderem hat die oben betrachtete Arbeit erreicht, daß die Mathematik ihre erhabene Stellung einbüßte, die sie seit Plato und Pythagoras innehatte, und daß das daraus resultierende Vorurteil gegen den Empirismus beseitigt wurde. Mathematische Erkenntnis wird allerdings nicht durch Induktion aus Erfahrung gewonnen: Daß 2 + 2 = 4 ist, glauben wir nicht, weil wir so oft die Beobachtung gemacht haben, daß ein Paar und noch ein Paar zusammen ein Quartett ergeben. In diesem Sinne ist die mathematische Erkenntnis nicht empirisch. Sie ist aber auch keine apriorische Erkenntnis der Welt. In Wirklichkeit handelt es sich bei ihr nur um eine verbale Erkenntnis. »3« bedeutet »2 + 1«, und 4 bedeutet »3 + 1«. Es ergibt sich also (wenn der Beweis auch lang ist), daß »4« das gleiche bedeutet wie »2 + 2«. So verliert die mathematische Erkenntnis den Charakter des Geheimnisvollen. Es entspricht ganz der »großen Wahrheit«, daß drei Fuß auf eine Elle gehen.

Neben der reinen Mathematik hat auch die Physik der Philosophie der logischen Analyse Material geliefert, und zwar besonders durch die Relativitätstheorie und die Quantenmechanik.

An der Relativitätstheorie ist für den Philosophen von Bedeutung, daß Raum und Zeit durch die Raum-Zeit ersetzt werden. Der gesunde Menschenverstand stellt sich die physische Welt aus »Dingen« bestehend vor, die sich während eines bestimmten Zeitabschnitts erhalten und im Raum bewegen. Philosophie und Physik entwickelten den Begriff »Ding« zum Begriff »materielle Substanz« und glaubten, die materielle Substanz bestehe aus jeweils sehr kleinen, permanenten Teilchen. Einstein ersetzte diese Teilchen durch Ereignisse; jedes Ereignis hat zu einem anderen eine Beziehung, das sogenannte »Intervall«, das sich nach verschiedenen Möglichkeiten in ein Zeit-Element und ein Raum-Element zerlegen läßt. Die Wahl zwischen diesen verschiedenen Möglichkeiten ist willkürlich; keine kann theoretisch für besser erklärt werden als die andere. Sind zwei Ereignisse, A und B, in verschiedenen Regionen gegeben, so kann es vorkommen, daß sie nach einer Übereinkunft als gleichzeitig gelten, während nach einer anderen A früher ist als B und nach einer dritten B früher als A. Kein physikalisches Faktum entspricht diesen verschiedenen Übereinkünften.

Aus alledem scheint hervorzugehen, daß Ereignisse, nicht Teilchen, der »Stoff« der Physik sind. Was für ein Teilchen gehalten wurde, wird als eine Reihe von Ereignissen angesehen werden müssen. Die Reihe von Ereignissen, die ein Teilchen ersetzt, hat bestimmte wichtige physikalische Eigenschaften und verlangt daher unsere Aufmerksamkeit; sie besitzt jedoch nicht mehr Substantialität als eine beliebige andere Reihe von Ereignissen, die wir willkürlich herausgreifen können. So ist die »Materie« nicht Teil des letzten Weltstoffes, vielmehr nur eine bequeme Methode, Ereignisse in Bündel zusammenzufassen.

Dieser Schluß wird durch die Quantentheorie bestätigt; sie ist aber physikalisch vor allem deswegen wichtig, weil sie physikalische Erscheinungen für möglicherweise unzusammenhängend hält. Sie nimmt an, daß in einem Atom (im obigen Sinne) ein bestimmter Zustand eine gewisse Zeit anhalte, um dann plötzlich durch einen begrenzten anderen Zustand abgelöst zu werden; die Stetigkeit der Bewegung, die immer vorausgesetzt wurde, scheint ein bloßes Vorurteil gewesen zu sein. Die der Quantentheorie entsprechende Philosophie ist jedoch noch nicht befriedigend entwickelt worden. Ich vermute, daß es dazu einer noch radikaleren Abkehr von den traditionellen Theorien von Raum und Zeit bedarf, als die Relativitätstheorie erforderte.

Während die Physik die Materie weniger materiell machte, wurde dem Geist durch die Psychologie etwas von seiner Geistigkeit genommen. Wir hatten bereits in einem früheren Kapitel Gelegenheit, die Ideen-Assoziation mit dem bedingten Reflex zu vergleichen. Der bedingte Reflex, der die Stelle der Ideen-Assoziation eingenommen hat, ist offensichtlich viel physiologischer. (Das ist nur ein Beispiel; ich möchte den Bereich des bedingten Reflexes nicht zu groß anneh-

men.) So haben sich Physik und Psychologie einander von entgegengesetzten Enden genähert und dadurch der durch William James' Kritik des »Bewußtseins« angeregten Lehre vom »neutralen Monismus« mehr Möglichkeiten eingeräumt. Die Unterscheidung von Geist und Materie kam aus der Religion in die Philosophie, obwohl schon lange triftige Gründe für sie zu sprechen schienen. Ich halte die Aufteilung in Geist und Materie nur für eine bequeme Methode, Ereignisse zu gruppieren. Gewisse einzelne Ereignisse gehören, wie ich zugeben will, nur zur materiellen Gruppe, andere hingegen zu beiden Gruppen, so daß sie gleichzeitig geistig und materiell sind. Diese Lehre vereinfacht stark unsere Vorstellung von der Struktur der Welt.

Die moderne Physik und die moderne Physiologie werfen ein neues Licht auf das alte Problem der Wahrnehmung. Wenn es etwas geben soll, das als »Wahrnehmung« zu bezeichnen ist, dann muß es bis zu einem gewissen Grade eine Wirkung des wahrgenommenen Objekts sein und mehr oder weniger dem Objekt gleichen, wenn daraus die Erkenntnis des Objekts entstehen soll. Das erste Erfordernis kann nur erfüllt werden, wenn es Kausalketten gibt, die mehr oder minder unabhängig von der übrigen Welt sind. Die Physik behauptet das. Lichtwellen dringen von der Sonne zur Erde und unterliegen dabei ihren eigenen Gesetzen. Dies trifft aber nur annähernd zu. Einstein hat bewiesen, daß die Lichtstrahlen von der Schwerkraft beeinflußt werden. Wenn sie unsere Atmosphäre erreichen, erfahren sie eine Brechung, wobei einige stärker zerstreut werden als andere. Wenn sie in das menschliche Auge fallen, dann geschieht vielerlei, was anderwärts nicht möglich wäre und was wir im Endeffekt als »die Sonne sehen« bezeichnen. Aber wenn auch die Sonne unserer visuellen Erfahrung sich stark von der Sonne des Astronomen unterscheidet, bleibt sie für ihn doch eine Erkenntnisquelle, denn das »Sehen der Sonne« weicht in einer Weise vom »Sehen des Mondes« ab, die kausal mit dem Unterschied zwischen der Sonne des Astronomen und dem Mond des Astronomen zusammenhängt. Was wir in dieser Weise von physischen Objekten erkennen können, sind aber nur bestimmte abstrakte Struktureigenschaften. Wir können erkennen, daß die Sonne in gewissem Sinne rund ist, wenn auch nicht genau in dem Sinne, in dem für uns etwas rund aussieht; wir haben aber keinen Grund zu der Annahme, sie sei hell oder warm, denn die Physik kann sie für hell oder warm erklären, wenn sie so erscheint, ohne anzunehmen, daß sie so ist. Unsere Erkenntnis der physischen Welt ist also nur abstrakt und mathematisch.

Der moderne analytische, von mir skizzierte Empirismus unterscheidet sich von dem Empirismus Lockes, Berkeleys und Humes dadurch, daß er die Mathematik einbezieht und eine brauchbare logische Technik entwickelt. Das ermöglicht es ihm, bei gewissen Problemen zu endgültigen Lösungen zu kommen, die mehr wissenschaftlichen als philosophischen Charakter tragen. Vor den Philosophien der Systematiker hat er voraus, daß er stets nur ein Problem in Angriff nehmen kann, statt auf einen Schlag eine komplette Theorie des ganzen Universums aufstellen zu müssen. Hierin gleichen seine Methoden den wissenschaftlichen. Für mich steht es außer Frage, daß nur durch Methoden dieser Art philosophische Erkenntnisse - soweit überhaupt möglich - erlangt werden können; und ebensowenig zweifle ich daran, daß durch diese Methoden viele alte Probleme vollständig lösbar werden.

Es bleibt jedoch noch ein weites Feld, das von alters her zwar der Philosophie zugerechnet wurde, wo aber wissenschaftliche Methoden unangemessen sind. Es umschließt letzte Fragen nach dem Wert; die Wissenschaft allein kann beispielsweise nicht beweisen, daß es etwas Schlechtes ist, Vergnügen an Grausamkeitsakten zu finden. Jedes Wissen ist nur mit Hilfe der Wissenschaft möglich; alle Dinge aber, die von Rechts wegen das Gefühl angehen, liegen außerhalb ihres Bereichs.

Die Philosophie hat während ihrer ganzen Geschichte aus zwei nicht harmonisch miteinander verbundenen Teilen bestanden: aus einer Theorie von der Natur der Welt und aus einer ethischen oder politischen Doktrin der besten Lebensweise. Daß beide nicht scharf genug voneinander getrennt wurden, hat viel gedankliche Unklarheit zur Folge. gehabt. Von Plato bis William James haben sich die Philosophen in ihren Anschauungen von der Beschaffenheit des Universums durch ihre Sehnsucht nach Erbauung beeinflussen lassen: Da sie zu wissen meinten, welche An-

sichten die Menschen tugendhaft machen würden, haben sie - häufig recht sophistisch - Beweise für die Wahrheit dieser Ansichten erfunden. Ich für mein Teil lehne diese gefühlsbetonte Art aus moralischen wie aus intellektuellen Gründen ab. Moralisch begeht jeder Philosoph, der seine professionelle Kompetenz zu etwas anderem gebraucht als zur uneigennützigen Erforschung der Wahrheit, einen gewissen Verrat. Und wenn er von vornherein, noch bevor er mit seiner Forschung beginnt, von der Voraussetzung ausgeht, daß gewisse Ansichten - ganz gleich, ob falsch oder richtig - dazu angetan sind, ein gutes Verhalten zu fördern, so engt er dadurch den Bereich der philosophischen Spekulation so weit ein, daß er die Philosophie trivialisiert; der wahre Philosoph ist gewillt, alle vorgefaßten Meinungen einer Prüfung zu unterziehen. Sobald bewußt oder unbewußt der Erforschung der Wahrheit Grenzen gesetzt werden, wird die Philosophie von Angst gelähmt und der Boden bereitet für eine oberste Zensur, die alle bestraft, welche »gefährliche Gedanken« äußern - ja, der Philosoph hat schon eine solche Zensur für seine eigenen Forschungen eingeführt.

In intellektueller Beziehung hat der Einfluß falscher moralischer Erwägungen auf die Philosophie in ungewöhnlich hohem Maße den Fortschritt gehemmt. Ich persönlich glaube nicht, daß die Philosophie die Wahrheit religiöser Dogmen beweisen oder widerlegen kann, aber seit Plato haben es die meisten Philosophen mit für ihre Aufgabe gehalten, Unsterblichkeits- und Gottes-»Beweise« aufzustellen. Sie übten Kritik an den Beweisen ihrer Vorgänger - Thomas von Aquino lehnte Anselms und Kant lehnte Descartes' Beweise ab -, aber dann kamen sie selbst mit neuen Beweisen. Um Beweisen den Anschein der Stichhaltigkeit geben zu können, mußten sie die Logik verfälschen, die Mathematik zu etwas Mystischem machen und tiefeingewurzelte Vorurteile als vom Himmel gesandte Eingebungen hinstellen.

All das haben die Philosophen verschmäht, welche die logische Analyse zur Hauptaufgabe der Philosophie gemacht haben. Sie geben offen zu, daß der menschliche Intellekt unfähig ist, schlüssige Antworten auf viele Fragen von höchster Bedeutung für die Menschheit zu finden; sie lehnen es aber auch ab, an eine »höhere« Möglichkeit der Erkenntnis zu glauben, durch die wir Wahrheiten gewinnen könnten, die Wissenschaft und Intellekt verborgen bleiben. Für diesen Verzicht wurden sie durch die Entdeckung belohnt, daß sich viele vormals in metaphysisches Dunkel gehüllte Fragen präzis und durch objektive Methoden beantworten lassen, bei denen das persönliche Temperament des Philosophen ausgeschaltet ist - abgesehen von seinem Wunsch, zu verstehen. Angesichts solcher Fragen, wie: Was ist Zahl?, Was sind Raum und Zeit?, Was ist Geist und was ist Materie?, möchte ich nicht behaupten, daß wir nun immer gleich diese alten Probleme endgültig lösen können; wohl aber meine ich, es ist ein Verfahren gefunden, das es uns ermöglicht, hier wie in der Wissenschaft der Wahrheit allmählich näher zu kommen, wobei sich jede neue Stufe aus einer Verbesserung ergibt, nicht aus dem Verwerfen des Vorangegangenen.

Im Chaos der widerstreitenden fanatischen Überzeugungen ist eine der wenigen einigenden Kräfte die wissenschaftliche Wahrheitsliebe; ich verstehe darunter die Gepflogenheit, unseren Glauben auf Beobachtungen und Schlüsse zu stützen, die so unpersönlich und von Veranlagung und Umgebung so unbeeinflußt sind wie nur menschenmöglich. Die Einführung dieses Verfahrens in die Philosophie durchgesetzt und eine brauchbare Methode, sie fruchtbar zu machen, gefunden zu haben, sind die Hauptverdienste der philosophischen Schule, der ich angehöre. Die aus der Anwendung dieser philosophischen Methode gewonnene Gewöhnung an strenge Wahrhaftigkeit läßt sich auf den ganzen Bereich des menschlichen Tuns ausdehnen; sie bewirkt allenthalben, daß der Fanatismus nachläßt und die Bereitschaft wächst, einander Sympathie und Verständnis entgegenzubringen. Wenn die Philosophie auch einen Teil ihrer dogmatischen Ansprüche aufgibt, so wird sie doch weiterhin den Weg zur rechten Lebensführung aufzeigen und die Menschen dafür begeistern.

4 Die Mengenlehre von Georg Cantor

„Eine Menge ist die Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen." (Georg Cantor)

Diese schlichte Definition von Mengen gilt im wesentlichen bis heute, weil sie gleichzeitig so gut wie keine Beschränkungen vorsieht. Trotzdem enthält sie wichtige Festlegungen.

Eigenschaft 1

Mengen sind das Ergebnis „menschlichen" Handelns, sie sind nicht a priori vorhanden, sondern durch Zusammenfassung von Objekten durch Menschen.

Auch Tiere fassen Objekte zu Mengen zusammen, manchmal sind diese Mengen den Menschen zugänglich, wie z.B. ein Vogelnest, aber nur entsprechend unserer Anschauung und unserem Denken. Wir können zwar versuchen, uns in die Anschauung eines Vogels hineinzudenken, es bleibt aber immer menschliches Denken.

Eigenschaft 2

Alle Objekte einer Menge sind verschieden, d.h. wenn A und B Objekte einer Menge M sind, dann gilt A ungleich B für alle A und alle B und alle M.

Eigenschaft 3

Objekte außerhalb der menschlichen Anschauung und des menschlichen Denkens kann man nicht zu Mengen zusammenfassen, wobei Anschauung und Denken nicht statisch zu verstehen sind, sondern dynamisch, d.h. sowohl das menschliche Denken, als auch die menschliche Anschauung verändern sich entlang der Zeitachse. An dieser Stelle hat Georg Cantor sehr weitsichtig gehandelt, denn hiermit fällt das Aristotelische Axiom vom ausgeschlossenen Dritten.

Eigenschaft 4

Die Reihenfolge der Zusammenfassung von Objekten zu einer Menge ist beliebig. Die Mengen

M_1={A , B, C} und

M_2={C, A, B} und

M_3={B, A, C} sind identisch.

Eigenschaft 5

Es gibt Mengen von Mengen, denn die Zusammenfassung von Objekten zu einem Ganzen ist selbst wieder ein Objekt unserer Anschauung oder unseres Denkens. Wenn Mengen also Objekte in diesem Sinn sind, dann kann man sie genauso zu Mengen zusammenfassen.

Die zu einer Menge M zusammengefaßten Objekte nennt man Element von M. Wenn **M={A, B, C}**, dann gilt **A** **M** und **B** **M** und **C** **M**.

4.1. Willkürliche Mengen

Triviale Mengeneigenschaft

Alle Elemente einer Menge haben zumindest eine gemeinsame Eigenschaft ,nämlich genau die Eigenschaft „Element einer bestimmten Menge zu sein", diese Eigenschaft nenne ich triviale Mengeneigenschaft. Die Menge **M={Abendkleid, Bachstelze, C-Dur}** ist in diesem Sinn trivial zusammengefaßt. Zwar sind alle Elemente von M Wörter des Deutschen, aber neben diesen drei Wörtern kennt das Deutsche viele andere Wörter, die nicht Element von M sind. Nicht einverstanden?

Ich weiß, unser Verstand versucht immer Ordnung im Chaos zu finden. Es stimmt, die Elemente von M fangen mit den ersten drei Buchstaben des lateinischen Alphabets an, aber das gilt auch für **M_2 = {Abenteuer, Bock, Chemie}**, und ich bin sicher, daß wir keine Schwierigkeiten haben weitere zehn verschiedene Mengen zu finden, für die das gleiche gilt. Mengen dieser Art werden oft in Intelligenztests eingesetzt: Was paßt nicht dazu **M={Hündin, Hammel, Huhn, Katze}**? Mit ein bißchen Phantasie kann man für jedes der Elemente eine Begründung finden, warum es nicht dazu paßt. Solche willkürlichen Mengen machen sich Betrüger, Diebe und Heiratsschwindler zu nutze, in dem sie vorgeben, Element einer bestimmten Menge zu sein, wenn das Opfer das glaubt, hat der Betrüger fast gewonnen.

Willkürliche Mengen kann man nur durch Aufzählung bestimmen und durch auswendig lernen benutzen. Die unregelmäßigen Verben einer Sprache machen uns genau deshalb so zu schaffen. In Computerprogrammen werden solche Mengen in Form einer Liste verwendet. Solche Listen sind z.B. alle Menüs und Untermenüs, alle Icons, Wörterbücher etc.

4.2. Nicht willkürliche Mengen

Eine Menge ist genau dann nicht willkürlich, wenn alle Elemente der Menge neben der trivialen Mengeneigenschaft eine weitere notwendige und hinreichende Eigenschaft haben.

Die Menge **N = {1, 2, 3, 4, 5, ... , n}** müssen wir nicht vollständig aufzählen, was auch gar nicht möglich ist, weil wir niemals damit zu Ende kämen. Trotzdem können wir von jedem beliebigen Objekt sagen, ob es Element von **N** ist oder nicht, denn jedes Objekt von **N** hat eine zusätzliche Eigenschaft, es ist eine natürliche Zahl.

Ist diese Eigenschaft notwendig, ich behaupte „ja", denn niemand kann mir ein Objekt nennen, das keine natürliche Zahl ist und trotzdem Element von **N**.

Ist diese Eigenschaft hinreichend, ich behaupte wieder „ja", denn wenn ein beliebiges Objekt eine natürliche Zahl ist, dann ist es Element von **N**.

Diese Eigenschaft von nicht willkürlichen Mengen ist besonders praktisch, denn es befreit uns von der Last sie aufzählen zu müssen, (Was bei **N** auch gar nicht geht.) es reicht diese zusätzliche Eigenschaft zu nennen. In diesem Fall also **N** ist die Menge der Natürlichen Zahlen.

Entsprechend: V_{ogel} ist die Menge aller Vögel. A_{imer} ist die Menge aller regelmäßigen Verben des Französischen usw. Wenn wir eine Vorstellung davon haben, was ein Vogel ist, dann können wir von jedem beliebigen Objekt sagen, ob es Element von V_{ogel} ist oder nicht. Man nennt die Angabe einer spezifischen Eigenschaft der Elemente einer Menge „Intension einer Menge", analog dazu nennt man die Aufzählung einer Menge „Extension einer Menge". Da die Extension entsprechend dem Begriff „Zusammenfassung von Objekten zu einem Ganzen" die primäre Methode zur Bestimmung einer Menge ist, muß jede Menge im Prinzip aufzählbar sein, d.h. es gibt keine Menge ohne Extension, es gibt aber Mengen ohne Intension, nämlich alle willkürlichen.

Was bedeutet aber „im Prinzip" aufzählbar? Die Menge der natürlichen Zahlen ist eigentlich im Prinzip nicht aufzählbar, trotzdem akzeptieren wir, alle Fachleute und auch Nichtfachleute, diese Intension als mengenbildend ohne Probleme. Dasselbe gilt für die Menge V_{ogel}, auch diese ist nur im Prinzip aufzählbar.

Sind aber die beiden Prinzipien dieselben? Bei den natürlichen Zahlen haben wir eine notwendige und hinreichende Eigenschaft (n ist dann und nur dann eine natürliche Zahl, wenn n>0 und eine ganze Zahl ist), diese beruht auf Axiomen der Zahlentheorie. Welche notwendige Eigenschaft muß ein Objekt haben, um Element von V_{ogel} zu sein, und ist diese Eigenschaft dann auch hinreichend, d.h. jedes Objekt mit dieser Eigenschaft ist Element von V_{ogel}? Ich will hier noch keine Antwort versuchen, aber ich bin mir sicher, daß die meisten Menschen Vogel als sauber definierte Menge betrachten.

4.3. Mengenoperationen

- Die Vereinigungsmenge (Die *oder* Operation)

Wenn $\mathbf{M_1=\{A, B, C\}}$ und $\mathbf{M_2=\{C, D, E\}}$ dann ist die Vereinigungsmenge $\mathbf{M_1 \cup M_2=\{A, B, C, D, E\}}$. Die Vereinigungsmenge von zwei Mengen M_1 und M_2 enthält alle Elemente beider Mengen, ist ein Objekt (hier C) sowohl Element von M_1 und M_2, dann wird es nur einmal übernommen, weil entsprechend der Definition der Menge, alle Elemente wohl unterschieden sein müssen.

- Die Schnittmenge (Die *und*Operation)

Wenn $\mathbf{M_1=\{A, B, C\}}$ und $\mathbf{M_2=\{C, D, E\}}$ dann ist die Schnittmenge $\mathbf{M_1 \cap M_2=\{C\}}$. Die Schnittmenge von zwei Mengen M_1 und M_2 enthält alle Elemente die sowohl Element von M_1 und M_2 sind. Haben M_1 und M_2 keine gemeinsamen Elemente, dann ist die Schnittmenge $\mathbf{M_1 \cap M_2= \varnothing}$ eine leere Menge, d.h. eine Menge ohne Elemente. Da entsprechend der Definition von Mengen alle leeren Mengen dieselben Elemente enthalten, handelt es sich immer um die selbe Menge, man nennt $\varnothing$ deshalb die leere Menge.

- Die Differenzmenge zweier Mengen

Gegeben seien die Mengen

M_1={Amsel, Drossel, Fink, Star} und
M_2={Fink, Star, Meise, Nachtigall, Zaunkönig}, dann ist
$M_1 \setminus M_2$={ Amsel, Drossel} (gelesen M_1 ohne M_2) und
$M_2 \setminus M_1$ ={Meise, Nachtigall, Zaunkönig} (gelesen M_2 ohne M_1)

- Die Komplementärmenge (Die *nicht* Operation)

Wenn $\mathbf{M=\{1, 2, 3, 4, 5\}}$ die Menge der natürlichen Zahlen 5 ist, dann ist $\mathbf{M_c=\{6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots , n\}}$ die Menge der natürlichen Zahlen > 5 und die Vereinigungsmenge von $\mathbf{M \cup M_c}= \mathbb{N}$, die Menge der natürlichen Zahlen. M_c ist gleich der Menge $\mathbb{N}$ ohne **M**, oder $\mathbf{M_c}= \mathbb{N} \setminus \mathbf{M}$. $\mathbf{M_c}$ ist die Komplementärmenge von M.

Die Definition der Komplementärmenge führt den Aristotelischen *Satz vom Widerspruch* in die Mengenlehre ein, und es fällt mir schwer irgendwelche echte Komplemente außerhalb der Mathematik zu finden.

Wir können z.B. zwei Teilmengen der menschlichen Frauen bestimmen, nämlich die Menge aller Frauen, die Mutter sind und deren Komplementärmenge, nämlich die Menge aller Frauen, die nicht Mutter sind. Was zunächst sehr plausibel aussieht, wird aber problematisch, wenn wir ins Detail gehen.

Ist eine Frau, die Adoptivkinder hat, Mutter oder nicht?

Ist eine Leihmutter, Mutter oder nicht?

Ist eine Frau, die eine Abtreibung hinter sich hat, Mutter oder nicht?

Ist eine Frau, die ein totes Kind zur Welt bringt, Mutter oder nicht?

Ist eine Frau, deren Kinder alle gestorben sind, Mutter oder nicht?

Die Juristen haben oder werden eine Lösung für jeden dieser Fälle haben, sogar finden müssen, denn sie sind zur Entscheidung verpflichtet, diese Entscheidung ist aber in der Regel auf einen Einzelfall oder zeitlich begrenzt.

Die Menge aller Väter ist noch viel schwieriger zu bestimmen.

- Die Teilmengen und Obermengen Eigenschaften

Ist die Schnittmenge zweier Mengen $\mathbf{M_1 \cap M_2=M_1}$, dann ist M_1 eine echte Teilmenge von M_2, wenn M_1 ungleich M_2 , geschrieben $\mathbf{M_1 \subset M_2}$. Wenn M_1 gleich M_2 ist, dann ist M_1 eine unechte

Teilmenge von M_2, geschrieben $\mathbf{M_1 \subseteq M_2}$. Aus der Sicht von M_2 ist M_2 eine (un-) echte Obermenge von M_1, geschrieben $\mathbf{M_2 \supset M_1}$ oder $\mathbf{M_2 \supseteq M_1}$.

M_2 sei die Menge aller Vögel und M_1 sei die Menge aller Drosseln, dann ist die Schnittmenge $\mathbf{M_1}$ $\mathbf{M_2=M_1}$, denn nur die Drosseln kommen in beiden Mengen vor. Die Menge aller Drosseln ist deshalb eine echte Teilmenge der Menge aller Vögel , und die Menge aller Vögel ist eine echte Obermenge zur Menge aller Drosseln.

- Nachtrag zur Vereinigungs- und Komplementärmenge

Wenn $\mathbf{M= M_1 \cup M_2}$ die Vereinigungsmenge von M_1 und M_2 ist, dann sind M_1 und M_2 Teilmengen von M. M_1 und M_2 sind immer echte Teilmengen von M, wenn M ungleich M_1 und M ungleich M_2. Hieraus folgt, daß jede Menge M und ihre Komplementärmenge M_c echte Teilmengen der Vereinigungsmenge $\mathbf{M \cup M_c}$ sind.

- Das Produkt zweier Mengen (Kartesisches Produkt)

Gegeben seien die Mengen

M_1={der Bahnhof von, das beste Kaufhaus in} und

M_2={Bochum, Essen, Köln}, dann ist das Produkt **$M=M_1 \times M_2$**

={ (der Bahnhof von, Bochum),
(der Bahnhof von, Essen),
(der Bahnhof von, Köln),
(das beste Kaufhaus in, Bochum),
(das beste Kaufhaus in, Essen),
(das beste Kaufhaus in, Köln)}

Ich werde hier nicht weiter auf Produkte von Mengen eingehen, denn sie sind intuitiv verständlich und Grundlage aller Entscheidungen, aber sehr langatmig in der Darstellung.

4.4. Zusammenfassung der Mengenalgebra

Die folgenden Sätze sind grundlegende Folgerungen der obigen Darstellung, wobei A, B, C, … Teilmengen einer Menge L darstellen, L ist so etwas wie eine universelle Obermenge:

1.	$A \cup B = B \cup A$ (Kommutativität der Vereinigung).
2.	$A \cap B = B \cap A$ (Kommutativität des Schnitts).
3.	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Assoziativität der Vereinigung).
4.	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Assoziativität des Schnitts).
5a	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
5b	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Distributivgesetze).
6.	Wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$, dann $A \subseteq C$.
7.	$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.
8.	$A \cup A = A = A \cap A$.
9.	$A \cup \varnothing = A$.
10.	$A \cap \varnothing = \varnothing$.
11.	$A \cup L = L$.
12.	$A \cap L = A$.
13.	$(A^c)^c = A$.
14.	Wenn $A \subseteq B$, dann $B^c \subseteq A^c$.
15a	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
15b	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (de Morgan'sche Regeln).
16.	$A \setminus B = A \cap B^c$.
17.	$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.
18.	Ist $A \cap B = \varnothing$, dann gilt $(A \cup B) \setminus B = A$.
19.	$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Diese Regeln sind eng verwandt mit der Booleschen Algebra für die Operationen „und", „oder" und „nicht" von Aussagen.

(Regeln entnommen aus Microsoft Encarta Professional 2003

4.5. Unendliche Mengen

Der Begriff „unendlich" ist sprachlich zweideutig, normalerweise verstehen wir unter „unendlich" eine sehr große Anzahl, vielleicht sogar so groß, daß es nicht möglich ist, die tatsächliche Anzahl zu bestimmen. Hierzu gehören Mengen, wie „die Menge aller Sandkörner" oder „die Menge aller Sterne" oder „die Menge aller Atome", aber auch „die Menge aller Deutschen" oder die am Anfang von mir bemängelte Behauptung Noam Chomskys über „die Menge aller Sätze einer Sprache".

Daneben gibt es einen zweiten Begriff von „unendlich", nämlich den mathematischen Fachbegriff. Diese Unendlichkeit betrifft ausschließlich Mengen unseres Denkens, niemals Mengen der Wirklichkeit. Alle diese Menge basieren auf der Unendlichkeit der „natürlichen Zahlen", d.h. jedem Element einer beliebigen unendlichen Menge kann man genau eine natürliche Zahl zuordnen. Wenn wir also nachweisen können, daß die „Menge der natürlichen Zahlen" unendlich ist, dann sind auch alle anderen Mengen der oben beschriebenen Art unendlich. Nur der Vollständigkeit halber will ich hier erwähnen, daß es Mengen gibt, die „unendlicher" sind als die Menge der natürlichen Zahlen.

- Unendlichkeit durch Induktion

Wie kommt man zu der Annahme, daß die Menge der natürlichen Zahlen unendlich ist? Zu diesem Ergebnis kommt man mit einem Axiom: „Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger, d.h. wenn „n" eine beliebige natürliche Zahl ist, dann gibt es eine Zahl m=n+1, die ebenfalls eine natürliche Zahl ist.

Dieses Axiom ist unmittelbar einsichtig, weil man tatsächlich für jede Zahl n einen Nachfolger m benennen kann, der genau n+1 ist. Wenn das aber für alle **n** N, dann ist N unendlich groß. Dieses Verfahren wird *Induktion* genannt und gehört zu den klassischen Beweisverfahren der Mathematik.

Mit diesem Verfahren hat schon Euklid nachgewiesen, daß zwei parallele Geraden einen Schnittpunkt im Unendlichen haben. Zwar ist der Beweis fehlerhaft, aber es geht nur um das Verfahren. Wenn man den Schnittpunkt zweier Geraden immer weiter weg schiebt, dann wird der Innenwinkel zwischen den Geraden immer kleiner und kleiner und im Unendlichen ist dieser Winkel dann 0°, d.h. es gibt keinen Winkel mehr, also auch keinen Schnittpunkt mehr, dann sind aber die beiden Geraden parallel, denn genau das ist die Definition von zwei Parallelen in einer Ebene.

Leider kann man dieses Verfahren überhaupt nicht auf die Wirklichkeit anwenden, höchstens im Scherz:

- Behauptung

In einen Koffer passen unendlich viele Socken

- Beweis

In einen Koffer passen zwei Socken. (wahr)

In einen Koffer passen n Socken. (Annahme)

Wenn in einem Koffer n Socken sind, paßt immer noch einer rein.

Die letzte Schlußfolgerung entspricht zwar der praktischen Erfahrung bezüglich Koffer und Sokken, aber nicht der Wirklichkeit.

- Fazit

Die „Unendlichkeit" im mathematischen Sinn ist zwar ein sehr spannendes Gedankenspiel und führt zu vielen kuriosen Ergebnissen, aber für die Linguistik ist sie vollkommen unbrauchbar, denn wenn sich eine Regel erst in der Unendlichkeit als richtig oder falsch erweist, dann ist sie vollkommen beliebig.

4.6. Was ist paradox?

Ein Kreter sagt zu einem Griechen: „Alle Kreter lügen."

Soll der Grieche dem Kreter glauben oder nicht?

Angenommen der Kreters lügt nicht, dann ist seine Aussage nicht wahr, und

angenommen der Kreters lügt, dann ist seine Aussage auch nicht wahr.

Zu diesem klassischen Beispiel eines Paradoxon lassen sich leicht analoge Beispiele finden:

Eine Frau sagt zu ihrem Mann: „Alle Frauen sind Schlangen."

Ein Beamter zu seinem Richter: „Alle Beamten sind unbestechlich."

Obwohl diese Sätze scheinbar paradox sind, kommen sie im täglichen Leben häufig vor, und niemand fällt auf, daß sie paradox sind. Ein schönes Beispiel dieser Art hört man fast täglich auf n-TV:

„Die Kurse fallen, weil es mehr Verkäufer als Käufer gibt."

Wodurch entsteht das Paradoxon und warum stört es uns in der alltäglichen Kommunikation nicht, erstens durch Selbstbezug und zweitens durch den Satz vom Widerspruch.

- Selbstbezug

Ein Kreter sagt zu einem Griechen: „Alle Kreter lügen." Paradoxon

Ein Römer sagt zu einem Griechen: „Alle Kreter lügen." Kein Paradoxon

Ein Kreter sagt zu einem Griechen: „Viele Kreter lügen." Kein Paradoxon

Das Paradoxon entsteht, weil „ein Kreter" Element der Menge aller Kreter ist und über diese Menge eine Aussage macht, d.h. er macht gleichzeitig eine Aussage über die Menge aller Kreter und sich selbst als Element dieser Menge. Eine solche Beziehung nennt man einen Selbstbezug. Ein solcher Selbstbezug liegt in den beiden anderen Beispielen nicht zwingend vor.

Bei dem n-TV Beispiel ist es genau umgekehrt, dort wird ein zwingend notwendiger Selbstbezug (Ein Verkäufer wird erst zum Verkäufer, wenn er einen Käufer gefunden hat und umgekehrt.) bestritten und hieraus eine Begründung für fallende Kurse abgeleitet.

Der Selbstbezug ist zwar eine notwendige, aber nicht hinreichende Eigenschaft zur Bildung eines Paradoxons, denn das Paradoxon der ersten drei Aussagen (Kreter, Ehefrau und Beamter) beruht noch auf einer weiteren notwendigen Eigenschaft, die aber in der Aussage selbst nicht erscheint.

- Die Verletzung des Satzes vom Widerspruch

Ein Kreter sagt zu einem Griechen: „Alle Kreter lügen." (Ich aber nicht!)

Ein Kreter sagt zu einem Griechen: „Alle Kreter lieben die Griechen." (Ich auch.)

Eine Frau sagt zu ihrem Mann: „Alle Frauen sind Schlangen." (Ich aber nicht!)

Eine Frau sagt zu ihrem Mann: „Alle Frauen sind treu." (Ich auch.)

Ein Beamter zu seinem Richter: „Alle Beamten sind unbestechlich." (Du auch ?)

Ein Beamter zu seinem Richter: „Alle Beamten verdienen zu wenig." (Du auch !)

Der Kreter, der behauptet, daß alle Kreter lügen, läßt uns gleichzeitig verstehen, daß er anders ist. Einerseits ist er Element der Menge aller Kreter, aber bezüglich des Lügens ist er nicht Element der Menge aller Kreter.

Die Frau, die behauptet, daß alle Frauen Schlangen sind, läßt uns gleichzeitig verstehen, daß sie anders ist. Einerseits ist sie Element der Menge aller Frauen, aber bezüglich des Schlangeseins ist sie nicht Element der Menge aller Frauen.

Mit dem Beamten und seinem Richter ist die Sache etwas komplizierter. Zunächst unterstellen wir, daß der Beamte wegen Bestechlichkeit angeklagt ist. Wenn er jetzt dem Richter sagt, daß alle Beamten unbestechlich sind, dann fordert er den Richter auf, dieser Aussage zuzustimmen,

andernfalls wird aus der Aussage deren Verneinung, also „Alle Beamten sind bestechlich." Da der Richter selbst Beamter ist, würde er sich hierdurch selbst belasten. Also stimmt der Richter zu und spricht den Beamten frei.

Da wir das Gemeinte aber immer mitverstehen, entsteht für uns kein Paradoxon, sondern wir verstehen die beiden ersten Sätze immer richtig, nämlich:

Ein Kreter sagt zu einem Griechen: „Alle anderen Kreter lügen." Oder
„Fast alle Kreter lügen."

Eine Frau sagt zu ihrem Mann: „Fast alle Frauen sind Schlangen." Oder
„Alle anderen Frauen sind Schlangen."

Der Richter könnte antworten: „Nein, nicht alle Beamten sind bestechlich."

„Alle diese Paradoxa beruhen auf
der Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthält

Diese Mengendefinition enthält alle Eigenschaften, die zum Paradoxon führen:

All-Menge
Selbstbezug
Element der All-Menge und nicht Element der All-Menge

4.7. Paradoxales

Dieser Satz ist falsch.

Das erste Lebewesen einer neuen Spezies hat keine Eltern.

Man kann ein Loch nicht zuschütten.

Eine Milliarde ist eine kleine Zahl.

Niemand ist kahlköpfig.

Es gibt genau so viele gerade Zahlen wie natürliche Zahlen.

Es gibt genau so viele Primzahlen wie natürliche Zahlen.

Jeder Mann fängt als Frau an.

Parallelen schneiden sich und schneiden sich nicht im Unendlichen.

Das Leben beginnt mit der Befruchtung.

Wolfgang Amadeus Mozart ist kein Österreicher.

Dieser Satz hat sechs, sieben oder acht Wörter.

Jemand, der nicht unfreundlich ist, ist freundlich.

5 Grundlagen von Logik und Mathematik

Selbstverständlich bin ich in den vorhergehenden Kapiteln immer wieder auf Grundlagen der Logik und der Mathematik eingegangen. Ich habe auch immer wieder auf Schwierigkeiten hingewiesen, wenn man diese Grundlagen in die Wirklichkeit überträgt. In diesem Kapitel will ich das Ganze einerseits zusammenfassen und andererseits um einige wenige Punkte, die bisher nicht angesprochen wurden, aber sehr wesentlich sind ergänzen.

5.1. Axiome

- Axiom

Ein Axiom ist eine so offensichtliche Wahrheit, daß man sie ohne Beweis akzeptieren kann.

Die Formulierung dieser Definition, die in ihrer Kernaussage unverändert gilt, verlangt, daß man eine Aussage ohne Beweis als wahr akzeptieren muß. Es wäre doch viel einfacher, das Axiom selbst zu beweisen als eine offensichtliche Wahrheit zu beschwören. Tatsächlich sind Axiome prinzipiell unbeweisbar und genau deshalb muß man sie entweder ohne Beweis akzeptieren oder

ablehnen. Die obige Definition verlangt von jedem, ein Axiom als offensichtlich wahr zu akzeptieren.

- Zitat

Axiome sind die Grundsätze, die die Grundlage für die Beweise anderer Sätze bilden. Axiome können nicht bewiesen werden. (aus Mathematik Online Lexikon, Text von Jörg Hörner)

Die Existenz eines göttlichen Wesens ist für sehr viele Menschen eine offensichtliche Wahrheit, und deshalb akzeptieren sie diese auch ohne jeden Beweis. Hieraus kann aber nicht folgen, daß jeder beliebige andere Mensch zu der selben Einsicht kommt oder sogar kommen muß.

Die Existenz von natürlichen Zahlen ist für fast alle Menschen eine offensichtliche Wahrheit, und deshalb akzeptieren sie diese auch ohne jeden Beweis. Hieraus kann aber nicht folgen, daß jeder beliebige andere Mensch zu der selben Einsicht kommt oder sogar kommen muß.

Weshalb gibt es mehr Menschen, die die Existenz von natürlichen Zahlen akzeptieren als die Existenz eines göttlichen Wesens? Warum gibt es Atheisten, aber keine Anumeralisten?

Man kann weder die Existenz der natürlichen Zahlen nachweisen, noch die Existenz Gottes. Man kann die natürlichen Zahlen für nützlich halten, aber auch ein göttliches Wesen.

Die natürlichen Zahlen sind ein Objekt unseres Denkens, das uns hilft unseren Alltag zu erleichtern (manchmal z.B. im Matheunterricht auch zu erschweren), auf das wir normalerweise nicht verzichten können, auf dem wir widerspruchsfreie Systeme wie Addition und Multiplikation aufbauen können und noch vieles mehr.

Ein göttliches Wesen ist aber ein Objekt unserer Anschauung, d.h. der vom Menschen unabhängigen Wirklichkeit. Hieraus folgt, daß es zwei verschiedene Arten von Axiomen geben muß, nämlich Axiome, die sich auf die Wirklichkeit beziehen und Axiome, die sich auf unser Denken beziehen.

- Das Axiom der Realität

Das wichtigste Axiom der Wirklichkeit, das nur ganz wenige Menschen nicht akzeptieren können, ist die offensichtliche Wahrheit, daß es diese Wirklichkeit überhaupt gibt und daß wir Bestandteil dieser Wirklichkeit sind. (Lediglich Plato und seine Nachfolger, sowie ein Nihilist haben mit diesem Axiom Probleme.) Probleme haben sehr viele Menschen eher mit der Tatsache, daß wir bezüglich der Wirklichkeit nichts Besonderes sind, sondern so etwas wie die Krone der Schöpfung.

- Das Axiom der Wahrnehmung

Wir können die Wirklichkeit mit Hilfe unserer Wahrnehmungsorgane erfahren. In diesem Axiom liegt gleichzeitig die Einschränkung, daß wir alles, was außerhalb unserer Wahrnehmung oder unserer Erinnerung liegt, nicht erfahren können . Niemand, auch ich selbst weiß nicht, was ich am 05.11.1957 abends gegessen habe. Daraus folgt außerdem, das niemand weiß, was innerhalb der nächsten Woche passiert.

Grundsätzlich gibt es noch das Problem, das ich im ersten Teil angesprochen habe, nämlich daß die Wahrnehmung eine biologische Funktion ist und deshalb für unser Überleben zuständig ist und nicht für die Erkenntnis der Wirklichkeit, d.h. die Wahrnehmung ist von Interessen und von individuellen Fähigkeiten geleitet, die können aber sehr verschieden sein.

Auch die Erinnerung beruht grundsätzlich auf Wahrnehmung, sei es der eigenen oder der anderer Menschen. Die Erinnerung ist sogar unzuverlässiger als die direkte Wahrnehmung, weil sowohl die Interessen, als auch die Fähigkeiten sich im Laufe der Zeit ändern. Außerdem können Erinnerungen heute nicht mehr zutreffend sein. Das gilt auch für schriftlich fixierte Erinnerungen.

Heute können ca. 95% aller geschäftsfähigen Deutschen schreiben und lesen, vor 150 Jahren waren das nur 5%. Es war in der Vergangenheit viel einfacher Dokumente zu fälschen. So beruht der Freibrief der „Freien und Hansestadt Hamburg" mit höchster Wahrscheinlichkeit auf einer Fälschung, und auch die „Konstantinische Schenkung", die den Bischof von Rom über alle anderen

Bischöfe erhebt, und diesen so zum Papst macht, ist eindeutig eine Fälschung. Beide Fälschungen haben massive Auswirkungen auf die Wirklichkeit von heute.

Auch die Historiker haben lernen müssen, daß eine authentische Quelle „ein Originaldokument" nicht immer die Wahrheit sagen muß, sondern z.B. Interessen dient. Eine römische Quelle, die behauptet, daß die Oliven aus Sizilien die besten Oliven sind, könnte schlicht die Werbung eines Olivenhändlers sein oder auf einer solchen beruhen.

- Das Axiom der Übertragbarkeit oder Ähnlichkeit

Wir können davon ausgehen, daß die Wirklichkeit sich nur in sehr kleinem Maße ändert. Daraus folgt, daß die Welt von vorgestern sehr große Ähnlichkeit mit der Welt von übermorgen haben wird. Das Axiom der Ähnlichkeit erlaubt es uns, etwas zu planen und Entscheidungen zu treffen und vor allem Regeln zu formulieren.

Das Axiom der Ähnlichkeit ist wahrscheinlich in uns genetisch fixiert, teilweise ist es sogar biologisch (d.h. Art unspezifisch) angelegt. So verläßt sich der für die Atmung verantwortliche Teil unseres Gehirns so sehr auf die Existenz der uns umgebenden Luft, und zwar ohne sie zu prüfen, daß er uns zwingt unter Wasser zu atmen, unser Verstand wehrt sich gegen die Atmung unter Wasser, aber am Ende verliert er gegen das Stammhirn, und wir ertrinken.

Obwohl wir ununterbrochen wahrnehmen, daß sich die Wirklichkeit ständig ändert, dringen diese Veränderungen kaum in unser Bewußtsein ein, es sei denn wir selbst wären von der Änderung stark betroffen. So betreiben die Menschen die Zuchtwahl ihrer Haustiere seit mindestens 5.000 Jahren, und alle diese Generationen von Menschen haben das bewußt miterlebt, und trotzdem gibt es auch heute noch viele Menschen, die die Evolution, d.h. die natürliche Selekton nicht *wahr* haben wollen. (Ich persönlich finde es erstaunlich, das die Menschen überhaupt 5.000 Jahre gebraucht haben, um auf die Idee der Evolution zu kommen.)

Die meisten Menschen möchten eigentlich, daß sich die Wirklichkeit nicht ändert, sie haben Angst vor Veränderungen, denn diese behindert sie bei der Planung der Zukunft. Diese Einstellung der Menschen muß jeder Entscheider berücksichtigen, wenn er weitreichende Entscheidungen trifft, denn das Verhalten auf Veränderung vieler Menschen ist rational nicht erklärbar.

5.2. Die Äquivalenzrelation

Ich sage zu einem Bekannten: „Ich habe dasselbe Auto wie Du."
Dieser antwortet: „Das geht nicht, höchstens das gleiche."

Da ich wie viele andere Menschen auch zu denen gehöre, die etwas „lax" mit dem Gebrauch von „dasselbe" und „das gleiche" umgehen, werde ich in ähnlicher Form wie oben verbessert. Früher habe ich immer langatmig und besserwisserisch versucht, denen zu erklären, daß „dasselbe" und „das gleiche" dasselbe ist. Heute sage ich meistens: "Doch, doch, denn ich bin eben hinten auf Dein Auto geknallt, Du erkennst es nicht mehr wieder." Deshalb müssen wir ein wenig über den Unterschied von „dasselbe" und „das gleiche" sprechen.

Zunächst müssen wir klären, wann denn zwei Objekte dasselbe sind, man bezeichnet eine solche Beziehung als Äquivalenz und solche Objekte als äquivalent.

- Definition von Äquivalenz

Zwei Objekte A und B sind dann und nur dann äquivalent, wenn gilt A = B und B = A.

Solche Objekte finden wir in der Mathematik, der Logik, der Philosophie, den Sprachen der Welt, den Rechtswissenschaften und vielen anderen Geisteswissenschaften in sehr großem Ausmaß.

- Beispiele

Kreise sind äquivalent, wenn ihre Radien gleich groß sind.
Quadrate sind äquivalent, wenn ihre Seiten gleich lang sind.
Dreiecke sind äquivalent, wenn alle Winkel und eine Seite gleich groß sind.

(3 + 4) und (4 + 3)
3 + 4 = 7
2(a + b) = 2a + 2b

In vielen Staaten der USA wird ein Mörder mit der Todesstrafe bedroht.
Die Vorstellung der Menschen von einem Kreis. (Plato, Descartes)
Cogito ergo sum. (Descartes)

In der Wirklichkeit kann es prinzipiell keine äquivalenten Objekte A und B geben, denn die Äquivalenz verlangt neben der Gleichheit auch noch die Symmetrie der Objekte, die ist in der Wirklichkeit grundsätzlich ausgeschlossen, denn dann müßten zwei Objekte zur selben Zeit am selben Ort sein können, das ist aber nach dem Pauli-Prinzip (Ausschließungsprinzip des Physikers Wolfgang Pauli) so gar Elementarteilchen verboten.

Ob das Pauli-Prinzip wirklich universell gilt, kann man vielleicht bestreiten, aber daß „mein Auto" nach der Übergabe durch den Verkäufer noch dasselbe ist, stimmt mit Sicherheit nicht, z.B. ist es sofort ca. 25% weniger Wert, es ist auch kein „Neuwagen" mehr sondern ein „neuwertiges Fahrzeug". Sogar der geneigte Leser oder Zuhörer dieses Textes ist nicht mehr derselbe, der er vorher war, denn er hat sich in der Zwischenzeit mit meinen Gedanken zur Äquivalenz beschäftigt und das bewirkt eine wenn auch geringe Veränderung seiner Person.

Es ist auch nicht egal, ob ich um 12 Uhr oder um 12 Uhr 3 Minuten die Champs Elisées in Paris zu Fuß überquere, denn um 12 Uhr hatten die Fußgänger noch grün. Trotzdem gibt es sehr viele Menschen, die meinen schlampigen Umgang mit „dasselbe" und „das gleiche" korrigieren.

Da aber nur sehr wenige Menschen meine häufigen Äußerungen vom Typ „Das einzigste, das ...", in „Das einzige, das ..." verbessern, obwohl logisch gesehen „einzig" nicht steigerbar ist, muß an „dasselbe" und „das gleiche" etwas sein, was einer anderen Logik gehorcht, einer Logik, die sich an der Wirklichkeit orientiert und nicht an logischen Definitionen. Die Äquivalenz in der Wirklichkeit muß noch definiert werden, wir können das hier nicht leisten, aber im nächsten Kapitel werde ich versuchen zu zeigen, in welche Richtung man gehen muß, um eine solche Lösung zu erarbeiten. Vielleicht denken wir gemeinsam in folgende Richtung:

Was könnte das Axiom von der Ähnlichkeit mit der Gleichheit zu tun haben?

5.3. Ordnungsrelationen

Ordnungsrelationen sind Beziehungen zwischen Objekten, die die Objekte in irgendeiner Weise anordnen.

Wir könnten z.B. alle Zeilen dieses Textes entsprechend der Mengenlehre in einer Menge zusammenfassen, nämlich in die Menge M aller Zeilen dieses Textes. Diese Menge M wäre aber grundverschieden von diesem Text, denn wir wissen, daß die Reihenfolge der Objekte einer Menge beliebig ist, die Reihenfolge der Zeilen dieses Textes ist aber in keinster Weise beliebig.

Noch schlimmer wäre das ganze, wenn wir die Menge aller Wörter dieses Textes mit dem Text vergleichen würden, nicht nur die Reihenfolge verschwindet, es verschwinden auch ganz viele Wörter, nämlich alle mehrfach vorkommenden Wörter würden jeweils nur einmal in der Menge vorkommen.

Die Menge aller gezogenen Lottozahlen, wäre äquivalent zur Menge aller natürlichen Zahlen $\leq$ 49, und es gäbe keine Lottomillionäre.

Das Problem der Teletransportation ist nicht die Zerlegung eines Objektes in seine Bestandteile, sondern die richtige Wiederherstellung nach erfolgtem Transport.

Die Menge aller Punkte eines Gemäldes ist nicht das Gemälde selber.

Alle Objekte der Wirklichkeit sind mehr als die Menge aller Objekte der Wirklichkeit, denn die Objekte der Wirklichkeit stehen in Beziehungen zu einander. Sie bilden eine Struktur und diese Struktur läßt sich mit Ordnungsrelationen beschreiben.

Eine Ordnungsrelation bezüglich meiner Person ist meine Adresse. Wenn Sie meine Adresse kennen und die darin versteckte Ordnung erkennen, dann haben Sie die Chance mich privat anzutreffen.

Dr. Rainer Rauch
Christian Rötzel Allee 21f
41334 Nettetal

Zunächst müssen Sie wissen, daß Nettetal ein Ort ist und daß dieser Ort in Deutschland liegt. Mit Hilfe einer Landkarte und einem Ortregister können Sie herausfinden, wie man nach Nettetal kommt. Dort fragen Sie einen Ortskundigen nach der Christian Rötzel Allee, weil Sie wissen, daß die Christian Rötzel Allee eine Straße ist. Dort angekommen suchen Sie ein Haus mit der Hausnummer „21f", die Sie selbstverständlich nach der Nummer „19" und vor der Nummer „23" suchen, weil Sie wissen, daß auf der einen Straßenseite die geraden Hausnummern sind und auf der anderen die ungeraden. Zuletzt klingeln Sie an der Schelle, auf der mein Name steht, und wenn Sie Glück haben, bin ich auch zu Hause.

Wenn Sie hierfür ein GPS-System oder ein Routenprogramm benutzen, dann ersparen Sie sich nur die Landkarte und die Befragung eines Ortskundigen, alles andere müssen Sie im voraus wissen. Wenn Sie mich in meiner zweiten Heimat in Sofia besuchen wollen, nützt Ihnen ein Großteil Ihres Vorwissens gar nichts mehr, ohne eine detaillierte Beschreibung meinerseits würden Sie mich wahrscheinlich niemals finden.

Die vom Menschen geschaffene Umwelt ist voll solcher Ordnungsstrukturen und die Unkenntnis einer Ordnungsstruktur kann sehr schädlich für die eigene Karriere sein.

Aber auch in der vom Menschen unberührten Wirklichkeit gibt es Ordnungsstrukturen und die dort vorhandenen Ordnungsstrukturen sind die Grundlage des Lebens überhaupt, denn Leben selber ist eine Ordnungsstruktur, aber eine sehr komplexe. Wir wollen uns hier zunächst mit einfacheren Ordnungsstrukturen und deren Eigenschaften befassen.

5.4. Lineare Ordnungsrelationen

- Ordnung auf einer Geraden

Von je zwei Punkten auf einer Geraden kann man eindeutig sagen,
der Punkt A liegt vor dem Punkt B, und der Punkt B folgt dem Punkt A.

Diese lineare Ordnung liegt auch den Zeilen dieses Textes zu Grunde, mit dieser linearen Ordnung kann man auch die Menge der Natürlichen Zahlen ordnen, nämlich von 1 über 2 und 3 usw. Mit dieser linearen Ordnung kann man auch das Telefonbuch und ein Wörterbuch ordnen.

- In der Wirklichkeit ist die Dimension der Zeit offensichtlich linear geordnet.

Die lineare Ordnung der Zeit, sorgt dafür, daß der richtige Zeitpunkt unwiederbringlich ist, es kann höchstens einen Zeitpunkt geben, der ähnlich günstig ist.

- Eigenschaften der linearen Ordnung

Für drei beliebige Objekte A, B, C gilt die Transitivität
(Übertragbarkeit einer Eigenschaft):

Wenn A vor B liegt und B vor C liegt, dann liegt auch A vor C
Wenn A < B und B < C dann auch A < C.

Wenn Herr Müller (B) mein (C) Vorgesetzter ist und Herr Meyer (A) der Vorgesetzte von Herrn Müller (B), dann ist Herr Meyer (A) auch mein (C) Vorgesetzter. (Das nicht zu wissen oder zu mißachten hat mit Sicherheit Einfluß auf meinen beruflichen Werdegang.)

Das gilt z.B. nicht in einer Ebene oder einem Raum, denn wenn A neben B liegt und B neben C liegt, dann liegt nicht auch A neben C.

Wenn A < B dann auch A + C < B + C.

Wenn A < B und B < C dann auch A + C < B + D

Wenn A < B und C > 0 dann auch A x C < B x C

Wird die Ordnung nicht unmittelbar auf eine Gerade abgebildet, sondern mittelbar, dann muß man eventuell sehr lange suchen. So sind die Wörterbücher und auch Telefonbücher der meisten lateinisch schreibenden Sprachen nicht gleich geordnet, weil sie mittelbar über das Alphabet geordnet sind, das lateinische Alphabet ist aber in den verschiedenen Sprachen selbst unterschiedlich geordnet, das betrifft zwar nicht die klassischen Buchstaben von A bis Z, aber alle Sonderbuchstaben, wie z.B. im Deutschen Ä Ü und Ö.

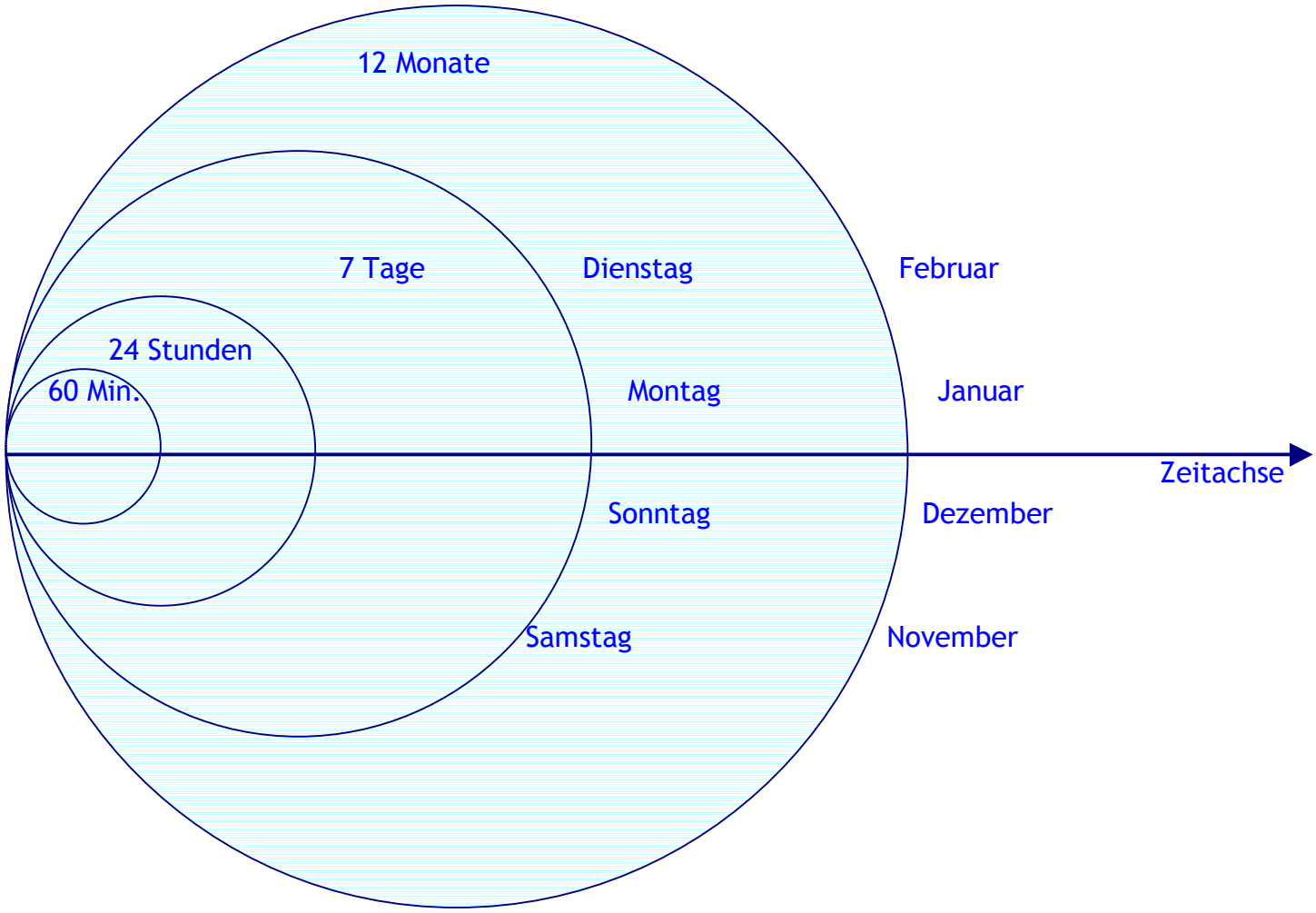
5.5. Zyklische Ordnungsrelationen

- Ordnung auf nicht linearen Graphen (Kurven)

Sehr viele Menschen glauben, daß Ordnung im Prinzip linear ist, obwohl wir von nicht linearen Ordnungsstrukturen (natürlichen wie menschlichen) in Mengen umgeben sind. Alle kleinen Kinder haben große Schwierigkeiten zu verstehen, daß heute „Dienstag" ist, obwohl doch schon letzte Woche „Dienstag" war. Die Wochentage sind aber nicht linear geordnet, sondern zyklisch oder periodisch. Es fängt mit „Montag" an und endet am „Sonntag" und dann geht es wieder mit „Montag" los usw. und das seit mindestens 4.000 Jahren, und es ist kein Ende abzusehen.

Ähnlich verhält es sich mit der Einteilung des Tages in zwei mal zwölf Stunden, mit den vier Jahreszeiten, mit den Monaten und vielen anderen Ordnungsstrukturen, ohne die wir in der heutigen Form gar nicht leben könnten. Diese Ordnungsstrukturen haben wir so sehr verinnerlicht, daß uns noch nicht einmal stört, wie unpraktisch sie sind, und wie kompliziert es ist, mit ihnen umzugehen. Warum hat der Tag nicht zwei mal zehn Stunden, die Woche zehn Tage und der Monat drei Wochen und das Jahr 36,5 Wochen. Ich weiß, es gibt viel bessere Vorschläge zur Änderung der Zeiteinteilung, aber unseres ist geradezu ein Musterbeispiel für besonders schlecht, trotzdem konnte sich keiner der Verbesserungsvorschläge durchsetzen.

Diese Einteilung der Zeit in kreisförmige Strukturen sieht ungefähr so aus:



Wenn der innerste Kreis, der Minutenkreis, sich einmal gedreht hat, sind 60 Minuten oder eine Stunde vergangen, wenn der Stundenkreis sich einmal gedreht hat, sind 24 Stunden oder ein Tag vergangen, entsprechend sind nach einer Drehung des Tageskreises 7 Tage oder eine Woche vergangen, und nach einer Drehung des Monatskreises sind 12 Monate oder ein Jahr vergangen. Natürlich ist die Zeichnung nicht maßstabsgerecht, aber sie verdeutlicht das Prinzip, wie durch Abrollen eines Kreises eine periodische Ordnung auf die lineare Ordnung der Zeit abgebildet wird.

Wichtig ist, daß die kreisförmige Anordnung der Zeit zwar vom Menschen ausgedacht ist, aber verschiedene Perioden, der Wirklichkeit abbildet. So folgen an den meisten Orten dieser Erde immer Tag und Nacht abwechselnd aufeinander, und in den Breitengraden, in denen der Kalender ausgedacht wurde, folgen vier deutlich verschiedene Jahreszeiten auf einander, die man dann noch in jeweils drei Monate mit 28 Tagen, eingeteilt hat, dabei war es bestimmt hilfreich, daß der Mond sich in ungefähr einem Monat um die Erde dreht und dabei vier Phasen durchläuft, die jeden Monat in vier Wochen einteilen.

Leider sind aber die Jahreszeiten und die Monate nicht synchron, denn 12 Monate a 28 Tagen ergeben nur 336 Tage, d.h. die Jahreszeiten verschieben sich jedes Jahr um einen Monat. Also hat man die Einteilung der Monate in 4 Wochen aufgegeben und das Jahr in 12 Monate mit 30 Tagen eingeteilt, es fehlten aber immer noch 5 Tage pro Jahr, was nach einigen Jahren aufgefallen ist. Durch genaue Beobachtung der Fixsterne hat man dann herausgefunden, daß ein Jahr ungefähr 365 Tage dauert, also hat man fünf Monate mit 31 Tagen geschaffen, was ungefähr der Wirklichkeit entsprach. Es fehlten aber immer noch ca. 6 Stunden an einem Jahr. Letztlich hat Julius Caesar dann das Jahr alle vier Jahre um einen Tag verlängert. Dieser nach seinem Schöpfer benannte Julianische Kalender hat dann fast 1.700 Jahre unverändert gehalten, bis man feststellte, daß man wieder hinter der Sonnenzeit herhinkte. Der nach seinem Erfinder benannte Grego-

rianische Kalender ließ den Zusatztag alle vier hundert Jahre dreimal ausfallen, wodurch 12 Tage nachträglich ausfielen.

Da dieser Gregorianische Kalender nicht überall in Europa eingeführt wurde, fand die russische Oktoberrevolution eigentlich im November statt und noch heute ist Heiligabend in Rußland am 7. Januar, und Ostern in Osteuropa und Westeuropa finden nie gleichzeitig statt.

Wie sehr dieser Kalender durch unsere geographische Lage bestimmt ist, kann man daran erkennen, daß es in den Tropen nur zwei Jahreszeiten gibt, es also überhaupt keinen Bedarf eines Kalenders für eine Ackerbaukultur gab. Weniger wichtig, aber trotzdem interessant ist, daß es in beiden Polargegenden auch nur je einen Tag und eine Nacht gibt, wobei wir den Polartag als Polarsommer und die Polarnacht als Polarwinter bezeichnen, obwohl der Polarsommer so kalt ist, daß noch nicht einmal Flechten wachsen.

Die heute weniger wichtige Periode des Mondumlaufs hat aber trotzdem Spuren in unserem Erbgut und Verhalten hinterlassen:

Sehr viele Menschen schlafen bei Vollmond schlechter und das war einmal überlebenswichtig.
Die Schwangerschaft dauert ziemlich genau 280 Tage, d.h. 10 Mondumläufe und die Periode der meisten Frauen ungefähr 28 Tage.
Ebbe und Flut kümmern sich nicht um unseren Kalender, sondern verschieben sich täglich um ca. 52 Minuten, was z.B. für das Fischereiwesen wichtig ist und vor allem war.
Die Woche hat immer noch sieben Tage. Das ist ein sehr wichtiger binnenwirtschaftlicher Faktor und deshalb steht in den meisten Kalendern die Abkürzung KW. Allerdings ist die Zählung in vielen Ländern anders.

Eigenschaften zyklischer Ordnungsstrukturen

Im Prinzip gelten auch in zyklischen Ordnungsstrukturen dieselben Eigenschaften, wie oben aufgeführt, aber in linearen Strukturen ist die Transitivität nie symmetrisch, d.h.

Wenn A < B liegt und B < C, dann liegt auch A < C und es ist <u>unmöglich</u>, daß auch C < A liegt.

In zyklischen Strukturen ist es sogar nicht nur möglich, sondern oft auch richtiger. Wenn wir das am Beispiel der Wochentage verdeutlichen, dann liegt „Montag vor Mittwoch und vor Sonntag", aber genauso richtig ist, daß „Sonntag vor Montag und vor Mittwoch" liegt. Spontan würden die meisten Menschen wahrscheinlich sogar sagen, daß Sonntag vor Montag richtiger ist als umgekehrt, obwohl das am Montagmorgen eindeutig falsch ist. In allen zyklischen Ordnungsrelation gilt die Symmetrie, wenn A < B dann auch B < A.

5.6. Ordnungsstrukturen und Entscheidungen

Was haben eigentlich Ordnungsstrukturen mit Entscheidungen zu tun? Auf einige Punkte habe ich oben schon hingewiesen, wie z.B. die hierarchische Struktur in einem Unternehmen, die aber sehr wohl auch zyklische Elemente enthalten kann, wenn man das Umfeld mitbetrachtet, wie der folgende Witz verdeutlicht:

Der Abteilungsleiter zu einem Monteur: „Ich bin mit Ihrer Arbeit sehr unzufrieden, gehen Sie ins Personalbüro, und lassen Sie sich Ihre Papiere geben."

Der Monteur zu seiner Freundin: „Der Chef hat mich heute entlassen."

Die Freundin zur Frau des Firmenchefs: „Ich kündige, Ihre Firma hat meinen Freund gefeuert."

Abends die Frau zu Ihrem Mann: „Wie konntest Du Herrn Baumann entlassen? Mach Dir selbst was zu essen, ich fahre zu meiner Mutter.

Der Mann zu seiner Frau: „Wer ist denn Herr Baumann?

Sie zu ihm: „Wer ist eigentlich der Chef in Deiner Firma?

Der Boss am nächsten Tag zum Abteilungsleiter: „Ich bin mit Ihrer Arbeit sehr unzufrieden, gehen Sie ins Personalbüro, und lassen Sie sich Ihre Papiere geben."

Neben den oben ausführlich dargestellten Perioden der Wirklichkeit, gibt es auch historische, kulturelle, wirtschaftliche, soziale und politische Perioden, die haben alle auch schöne Namen:

- Geschichte Altertum, Kaiserzeit, Biedermeier, Nachkriegszeit
- Kultur Gotik, Renaissance, Realismus
- Wirtschaft Baisse, Boom, Rezession, Deflation, Globalisierung
- Gesellschaft Sklavenhalter, Feudalismus, bürgerlich
- Politik Aristokratie, Diktatur, Demokratie

Viele große Geister haben sich mit dem Entstehen, Blühen und Vergehen solcher Perioden beschäftigt, aber niemand hat eine wirklich befriedigende Antwort bis heute darauf gefunden. Man wird auch keine Antwort darauf finden, zumindest keine „richtige", denn die Systeme, die zu solchen Perioden führen, sind viel zu komplex, als daß man darauf eine Antwort finden kann. Insbesondere sind solche Perioden nicht vorhersehbar, denn sie können auf spontanen, realen oder vermuteten größeren Veränderungen der Wirklichkeit beruhen.

Und die Menschen selber sind Bestandteil dieser Wirklichkeit, d.h. auch ihr eigenes Verhalten kann solche Veränderungen hervorrufen und hat auch in der Vergangenheit immer wieder zu sehr großen Verwerfungen geführt. So ist die Oktoberrevolution 1917 von weniger als 100 Menschen begonnen und letztlich auch durchgeführt worden. So hat ein Mann, Julius Caesar, das römische Reich geschaffen, wenn auch ungeplant. Der natürliche Tod von Djingis Khan hat Europa vor einer möglichen Mongolisierung gerettet. Aber die Erklärung mit großen Persönlichkeiten reicht nicht aus, denn es gibt keine Täter ohne Opfer und umgekehrt. Es reicht nicht aus Claude Monet zu sein, um die Malerei zu revolutionieren, dieser Claude Monet muß auch noch zum richtigen Zeitpunkt leben, um erstens seine Ideen überhaupt zu bekommen und um sie dann zu verwirklichen. Hätte Bill Gates im 18. Jahrhundert in den Oststaaten, der USA gelebt, würde ich trotzdem hier sitzen und mit einem Textprogramm diesen Text schreiben, wäre Caesar als Kind an seiner Epilepsie gestorben, wäre das römische Reich trotzdem entstanden.

Beschäftigen wir uns am Schluß dieses Kapitels ein bißchen mit Wirtschaft und möglichen Entscheidungen und Regeln, die man dort finden kann.

5.7. Die sieben fetten und sieben mageren Jahre

Schon in der Bibel wird berichtet, daß im alten Ägypten wirtschaftliche Perioden beobachtet wurden, nämlich daß auf sieben fette Jahre, sieben magere Jahre folgen, um dann wieder von sieben fetten Jahren abgelöst zu werden usw. Hierbei handelt es sich um eine typische zyklische Ordnungsrelation, wobei die Zahl sieben nicht unbedingt Ernst genommen werden muß, denn die Zahl sieben gehört zu den magischen Zahlen, wie drei und dreizehn. Aber vielleicht ist sieben genau wegen dieser Periode von Überfluß und Mangel zu einer magischen Zahl geworden.

Man hat diese Bibelstelle sehr lange für ein Gleichnis gehalten oder eine Banalität, wie „Auf Regen folgt Sonnenschein.", aber in den siebziger Jahren des 19. Jahrhunderts hat man beobachtet, daß die Menge an Schweinefleisch, die im Handel erhältlich war, einem solchen sieben jährigem Rhythmus folgt und auch eine Erklärung dafür gefunden.

Wenn es wenig Schweinefleisch gibt, ist das Angebot kleiner als die Nachfrage und die Preise steigen.

Wenn die Preise für Schweinefleisch steigen, lohnt es sich für die Produzenten von Schweinefleisch, mehr davon zu produzieren. Also steigern einige Produzenten die Produktion.

Wenn mehr Schweinefleisch produziert wird, dann steigt das Angebot.

Wenn andere Produzenten von Schweinefleisch feststellen, daß ihre Konkurrenten die Produktion erfolgreich ausgeweitet haben, folgen sie dem Beispiel.

Die vermehrte Produktion von Schweinefleisch führt zu steigenden Preisen bei den Futtermittel Herstellern, die wiederum mehr Geld für Löhne und Pacht von Land ausgeben müssen, die Lohnarbeiter und die Pächter geben ihr Geld für andere Produkte aus, hierdurch steigt die Nachfrage nach Schweinefleisch, denn man kann es sich jetzt wieder leisten.

Eine Zeit lang steigen Nachfrage und Angebot nach Schweinefleisch gleichmäßig.

Eines Tages behauptet ein berühmter Arzt, der Genuß von Schweinefleisch sei ungesund, viele Menschen glauben das und verbrauchen weniger Schweinefleisch, die Nachfrage sinkt zunächst langsam, dann etwas schneller, irgendwann ist das Angebot größer als die Nachfrage.

Wenn das Angebot größer ist als die Nachfrage, senken einige Produzenten die Preise, um die Nachfrage zu stabilisieren, um aber weiter Gewinn zu machen, spart der Produzent Kosten ein.

Wenn Kosten gespart werden, verfügen andere Menschen über weniger Geld und fangen ebenfalls an zu sparen, hierdurch verfügen plötzlich immer mehr Menschen über weniger Geld und schränken den Verbrauch von Schweinefleisch ein.

Wenn der Verbrauch stark sinkt, dann übersteigt das Angebot die Nachfrage und die Preise sinken jetzt auf breiter Front.

Viele Produzenten können nicht mehr kostendeckend Schweinefleisch produzieren und gehen Pleite oder produzieren etwas anderes. Dadurch sinkt das Angebot und die Preise stabilisieren sich, aber nur einige wenige Produzenten können den Preiskampf durchstehen und das Angebot an Schweinefleisch sinkt kräftig.

Eines Tages ist die Nachfrage nach Schweinefleisch größer als das Angebot und das ganze beginnt von vorne.

Diese Beschreibung ist zwar etwas länger als ursprünglich gedacht, aber immer noch nur ein Kratzen an der Oberfläche des wirklichen Geschehens.

Neben der Wiederentdeckung dieses sieben Jahrerhythmus hat man noch längerfristige Perioden aus der Vergangenheit zu erschließen versucht. So gibt es eine Theorie, die eine überlagernde siebzig jährige Periode festgestellt haben will. Zumindest für das letzte Jahrhundert trifft das ungefähr zu, denn die große Weltwirtschaftskrise von 1929 liegt ziemlich genau siebzig Jahre vor dem Beginn des Abschwungs des Jahres 2000. Bedauerlicherweise liegt uns kaum aussagekräftiges Zahlenmaterial für die Vergangenheit vor, um solche Theorien ernsthaft zu überprüfen. Au-

ßerdem gibt es neben den rein wirtschaftlichen Faktoren auch klimatische Faktoren, die eine erhebliche Rolle spielen können.

So ist z.B. das 17. Jahrhundert besonders kalt in Europa gewesen und hat zu einer sehr großen Zahl an Hungersnöten geführt. Diese haben möglicherweise Ludwig dem 14. ermöglicht die Zentralmacht in Frankreich so zu stärken, daß der Provinzadel keine politische Rolle mehr spielen konnte, was letztendlich zum Erfolg der französischen Revolution beigetragen hat. Glanz und Gloria des Sonnenkönigs sind die Verboten des Untergangs des Feudalismus in Europa, der letzte gigantische Boom, der in sich selbst den Keim des Untergangs trägt, denn in diesem Boom haben sich vor allem der König und das gebildete Bürgertum bereichert, der Provinzadel aber ist verarmt.

5.8. Richtige und falsche Entscheidungen

Da man offensichtlich solche Perioden nicht erkennen kann und deshalb auch nicht vernünftig planen kann, haben sich einige Verhaltensregeln gebildet, die aber z.T. noch in sich widersprüchlich sind. Wenden wir uns am Ende einigen Börsenregeln zu.

- Sell on May

Diese Regel hat etwas mit der Periode des Jahres zu tun, denn im Sommer sinkt üblicherweise die industrielle Produktion und viele Menschen, vor allem reichere machen im Sommer Urlaub. Wenn man im Mai verkauft und im August zurückkauft, kann man meistens ein Schnäppchen machen, es sei denn es gibt wieder einen 11. September.

- Verhalte dich antizyklisch

Dieser Regel liegt die Banalität des „Auf Regen folgt Sonnenschein" zu Grunde. Wenn ich Aktien kaufe, wenn die Kurse heftig fallen, dann regnet es gerade, aber eines Tages wird die Sonne wieder scheinen und die Kurse wieder steigen, dann muß ich die Aktien mit Gewinn veräußern und wieder auf Regen warten.

- Greife nie in ein fallendes Messer

Diese Regel besagt genau das Gegenteil der antizyklischen Regel, d.h. verhalte dich wie die Masse der an der Börse Handelnden. Verkaufe, wenn die Kurse fallen und Kaufe, wenn die Kurse steigen. Diese Regel sagt aber nicht, wie man dabei Geld verdient. Also muß man sie inhaltlich ergänzen. Verkaufe immer zu einem höheren Kurs als du gekauft hast und begrenze Verluste eindeutig. Bei steigenden Kursen kaufen, wenn die Kurse um einen bestimmten Betrag gestiegen sind verkaufen (Gewinn realisieren). Wenn die Kurse dann aber weiter steigen? Was dann? Wieder einsteigen und den Buchverlust verschmerzen?

- André Kostolany: „Kaufen und vergessen"

Diese Regel vertraut darauf, daß langfristig Aktienkurse grundsätzlich steigen und setzt voraus, daß ich überflüssiges Geld besitze. Implizit vertraut sie auch darauf, daß ein börsennotiertes Unternehmen niemals Pleite geht, denn dann können zwar alle anderen Aktien irgendwann steigen, nicht aber meine. André Kostolany hat zumindest in einem bekannten Fall nach dieser Regel gehandelt, er hat „Schuldverschreibungen des Deutschen Reichs" aus der NS-Zeit 1945 zu einem Spottpreis gekauft und dann von der Bundesrepublik den Nennwert in DM erhalten, aber ein Staat kann nicht wirklich pleite gehen, deshalb war das Risiko nicht so groß, daß ein Totalverlust hätte eintreten können. Trotzdem war das eine geniale Spekulation.

Es gibt nur eine funktionierende goldene Regel:

- Kaufe und Verkaufe immer zum richtigen Zeitpunkt

Diese Regel stimmt zwar, hat aber das Problem des Wortes „richtig". Sie ist so wahr wie „Triff immer die richtige Entscheidung". Klar, ganz sicher kann man nicht sein, wann richtig ist, aber man kann sehr viel dafür tun, um es einschätzen zu können. Erfahrene Börsianer treffen auch nicht immer die richtige Entscheidung, aber meist eine „bessere" als die anderen Marktteilneh-

mer. Wenn man „richtig" als „meistens besser als die anderen" versteht, dann kommt man dem „richtig" schon sehr nah.

Die meisten Menschen verhalten sich in dem Umfeld, in dem sie leben zwar nicht immer richtig, aber richtig genug, um nicht schlecht zu überleben. Die Entscheidung des Bundeskanzlers mit der Antikriegsstimmung im Sommer 2002 die Bundestagswahl zu gewinnen und so Bundeskanzler zu bleiben, war zunächst richtig, das Ziel ist erreicht worden, aber vielleicht war der Preis zu hoch, nicht nur für ihn persönlich, sondern für uns alle.

Denn zyklische Ordnungsrelationen sind wie Kreise, und wenn man im Kreis geht kommt man immer wieder zum Anfang zurück, denn die Transitivität ist hier symmetrisch.

6 Fuzzy Logic

6.1. Vorbemerkungen

Die in den vorherigen Kapiteln aufgeführten Probleme sind seit mindestens 120 Jahren Gegenstand von Diskussionen und Vorschlägen zu ihrer Überwindung. Es gab auch interessante und brauchbare Vorschläge, die z.T. in einzelnen Wissenschaften verwendet wurden, aber ein systematischer Lösungsversuch ist bis 1964 nicht gelungen.

„ ... im Spätsommer 1964 verfaßte er (Lotfi Zadeh) seinen berühmten Artikel über Fuzzy Logic." (Fuzzy Logic . Die „unscharfe" Logik erobert die Technik, Seite 33)

Nun von Eroberung konnte bis 1990 überhaupt nicht gesprochen werden und berühmt ist der Artikel nur unter Eingeweihten. Dies hat mit drei ineinander verzahnten Gründen zu tun.

- Fuzzy Logic ist keine andere Logik, sondern ein Vorschlag einer Erweiterung der Cantorschen Mengenlehre und den dafür notwendigen Operatoren.
- Der Name „Fuzzy Logic" (unscharfe Logik) beschreibt zwar das Problem der klassischen Logik ziemlich treffend, trotzdem ist der von Lotfi Zadeh gewählte Name zunächst sehr hinderlich gewesen, denn welcher Wissenschaftler möchte schon „unscharfe" Wissenschaft betreiben.
- Die klassische Logik wird seit fast 2.500 Jahren betrieben und eine Neuformulierung einer wissenschaftlichen Disziplin muß schon erstaunliche Vorteile haben, ehe sie sich durchsetzen kann. Auch die Mengenlehre von Cantor ist nicht mit einem Begrüßungskomitee der etablierten Wissenschaftler empfangen worden.

Allerdings könnte es auch so sein, daß nur der reißerische und unpassende Name „Fuzzy Logic" den Durchbruch in weniger als 25 Jahren überhaupt erst ermöglicht hat. Insbesondere die technische Umsetzung eines mathematischen Konzepts in so kurzer Zeit ist schon erstaunlich.

Was ist aber „Fuzzy Logic" eigentlich und wie löst „Fuzzy Logic" die Probleme der klassischen Logik.

6.2. Definition von Fuzzy Logic

Wenn man das Konzept von Zadeh zum ersten mal sieht, dann fällt es einem wie Schuppen von den Augen, man sieht plötzlich alle Probleme verschwinden, die die klassische Logik und Mengenlehre hatte. Aber das Konzept ist so einfach, um nicht zu sagen simpel, daß man sich ernsthaft fragen muß, warum denn niemand vorher in den letzten 2.500 Jahren darauf gekommen ist. Aber ähnlich ist es mit den „arabischen Zahlen" und den Rechen Regeln des Adam Riese, simpel einerseits und gewaltige Problemlöser. Wir können uns gar nicht mehr vorstellen, wie man ohne diese Zahlen und Regeln überhaupt rechnen konnte (ziemlich mühselig).

„Eine Menge ist die Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen." (Georg Cantor)

Diese schlichte Definition von Mengen gilt im wesentlichen bis heute, weil sie gleichzeitig so gut wie keine Beschränkungen vorsieht. Trotzdem enthält sie wichtige Festlegungen.

Das Problem liegt in dem Begriff „wohlunterschieden", der es uns nicht ermöglicht hat „Mutter" genau festzulegen, obwohl das doch eigentlich ziemlich simpel aussieht. Lotfi Zadeh erweitert die Mengen Cantors, in dem er aus den Elementen einer Menge jeweils Paare macht, er verheiratet jedes Element mit einer Prozentzahl, die er als Dezimalzahl zwischen 0 und 1 darstellt, also 0 = 0%, 0.1 = 10%, 0.2 = 20%, ..., 0.8 = 80%, 0.9 = 90% und 1 = 100%. Die Schreibweise ist aus der Wahrscheinlichkeitstheorie entlehnt, aber eigentlich willkürlich, es handelt sich um eine Abbildung aller Elemente einer Menge auf die Menge der natürlichen Zahlen, d.h. wir erhalten eine lineare Ordnung der Elemente der Menge, ohne daß wir eine Reihenfolge der Elemente einer Menge fordern müssen.

Nehmen wir zunächst einmal die beiden extremen Seiten des Mutterbegriffs:

- Definition von Mutter

Eine Mutter ist ein weiblicher Mensch, der mindestens ein Kind zur Welt gebracht hat und allein oder innerhalb einer Familie (Lebensgemeinschaft) groß zieht oder groß gezogen hat.

Nicht Mutter ist ein weiblicher Mensch, bei dem noch nie ein Ei befruchtet wurde, und der, weder allein, noch innerhalb einer Familie (Lebensgemeinschaft) mindestens ein Kind groß zieht oder groß gezogen hat.

Wenn wir mit dieser Definition an unsere Fragen von oben herangehen, dann kann man diese relativ leicht beantworten, denn fast alle diese Frauen sind entsprechend unserer Definition nach keine Mütter.

- Ist eine Frau, die Adoptivkinder hat, Mutter oder nicht?
- Ist eine Leihmutter, Mutter oder nicht?
- Ist eine Pflegemutter, Mutter oder nicht?
- Ist eine Frau, die eine Abtreibung hinter sich hat, Mutter oder nicht?
- Ist eine Frau, die ein totes Kind zur Welt bringt, Mutter oder nicht?
- Ist eine Frau, deren Kinder alle gestorben sind, Mutter oder nicht?

Lediglich die letzte Frage kann nicht eindeutig beantwortet werden, denn wir müßten klären, in welchem Alter alle ihre Kinder verstorben sind, denn ist nur eines von ihr großgezogen worden, dann wäre sie schon eine Mutter.

Wenn wir uns jetzt selbst fragen, ist meine Mutter in diesem Sinn eine Mutter, dann können wir diese Frage nur beantworten, wenn wir selbst schon groß gezogen sind oder erwachsene Geschwister haben, von denen wir wissen, daß deren Mutter auch unsere Mutter ist. Letztlich kann aber nur ein Gen-Test, der übrigens auch einen Fehlerquotienten von mindestens 2/100.000 hat, den „letzten" Beweis erbringen. (Vorausgesetzt meine Mutter hat keinen eineiigen Zwilling.) Die Menge unserer Mütter ist dann:

$\mathbf{M_{Cantor} = \{Mutter_1, Mutter_2, ..., Mutter_n\}}$ oder in der Schreibweise von Lotfi Zadeh:

$\mathbf{M_{Zadeh} = \{(Mutter_1,1), (Mutter_2,1) ..., (Mutter_n,1)\}}$

Diese beiden Mengen sind nur verschiedene Schreibweisen der selben Menge, aber Zadeh's Erweiterung erlaubt auch die anderen Mütter zu bestimmen:

Leibliche Mutter	= (Mutter, 1)
Adoptivmutter	= (Mutter, 0.9)
Leihmutter	= (Mutter, 0.7)
Pflegemutter	= (Mutter, 0.6)

Frau nach Totgeburt = (Mutter, 0.5)

Frau nach Abtreibung = (Mutter, 0.2)

Frau, mit verstorbenem Kind = (Mutter, 0.5 bis 1)

Wie oben schon angedeutet hängt die zu wählende Zahl im letzten Fall vom Alter des Kindes ab, in dem es verstorben ist. Bei einem Kind, daß noch während des Krankenhausaufenthaltes der Mutter verstirbt, könnte man (Mutter, 0.6) wählen, aber schon nach einer kurzen Zeit der Aufzucht (zwei bis drei Monate) würde man wahrscheinlich (Mutter, 1) wählen.

Die Berechtigung dieser Einteilung kann man auch daran erkennen, daß ein Kind nur dann zur Waise wird, wenn die leibliche Mutter oder die Adoptivmutter stirbt, nicht aber, wenn eine Leihmutter oder Pflegemutter verstirbt. Wohlgemerkt in all diesen Fällen geht es um den biologischen Mutterbegriff und nicht um die „Mutter der Kompanie" oder die „Mutter der Porzellankiste".

- Definition einer unscharfen Menge

Eine unscharfe Menge ist eine Menge von Paaren (Tupeln) (L,R), wobei der linke Teil „L" ein Element aus einer Cantorschen Menge und der rechte Teil „R" eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1 ist. Diese Zahl beschreibt den Grad mit dem „L" der Cantorschen Menge angehört.

Diese Zahl „R" ist nicht willkürlich, sondern wird mit der gleichen Sorgfalt ausgesucht, wie die Elemente einer Cantorschen Menge. Sie hat zudem den Vorteil, daß man sie beliebig verfeinern oder bei Bedarf sogar ändern kann. Sie beschreibt Abstufungsgrade der Gemeinsamkeit zwischen den Elementen unscharfer Mengen.

- Beispiel Intelligenztest

Was paßt nicht dazu **M={Hündin, Hammel, Huhn, Katze}**?

1. Huhn, denn nur „Huhn" ist ein Vogel
2. Hammel, denn nur „Hammel" ist männlich
3. Katze, denn alle anderen Wörter fangen mit „H" an
4. Hündin, denn nur in Hündin gibt es einen Umlaut.

Obwohl jedes Element sich als richtig begründen läßt, gibt es zwischen den Lösungen Abstufungen. Ich würde folgende vorschlagen:

Was paßt nicht dazu **M={(Hündin, 0.1), (Hammel, 0.6), (Huhn, 0.9), (Katze, 0.2)}**?

Natürlich kann man nicht wissen, was der Autor wirklich testen will, unsere Konventionalität oder unseren Erfindungsreichtum, noch kann man wissen wie unwissend der Autor ist, aber mit Fuzzy Logic kann man eine Entscheidung treffen, nämlich die richtige Lösung der Aufgabe ist die mir dem höchsten Grad, also „Huhn".

Menschen mit viel Testerfahrung machen sich die Fuzzy Logic zu Nutze, ohne auch nur von ihr gehört zu haben. Die Multiple Choice Aufgabe mit vier vorgegebenen Lösungen ist sehr weit verbreitet und beliebt, weil man sie schnell und eindeutig auswerten kann, aber mit etwas Übung kann ein Prüfling sehr schnell erkennen, daß die vier vorgegebenen Lösungen (Distraktoren) nicht gleichwertig sind und meistens zwei von vorneherein ausschließen, so daß die Chance die richtige Lösung zufällig zu finden auf 50% steigt. Wenn man bedenkt, daß man einen Test international mit 60% richtigen Lösungen als bestanden wertet, dann muß der Prüfling nur noch 20% der Lösungen wirklich wissen, um einen solchen Test zu bestehen.

Aber auch komplexere Testformen sind mit Fuzzy Logic leichter lösbarer als ohne. Denn nicht alle Fragestellungen, nicht alle Texte und noch nicht einmal alle Fragen haben den gleichen Grad an Wahrscheinlichkeit in einem solchen Text vorzukommen.

So ist es zum Bestehen der DSH-Prüfung wahrscheinlich sinnlos den unterschiedlichen Gebrauch der deutschen Konjunktionen „wenn" und „als" richtig zu erlernen, es reicht zu wissen, daß „als" für vergangene Zeitpunkte gilt und „wenn" für Gegenwart und Zukunft. Dies bedeutet nicht, daß man unter Benutzung von Fuzzy Logic leichter Fremdsprachen erlernen kann, sondern

nur daß sie behilflich ist, Einstufungs- und Zulassungstests sowie die meisten anderen Testformen erfolgreich zu bewältigen.

6.3. Fuzzy Logic und Sprache

In allen *natürlichen* Sprachen gibt es Fuzzy Elemente, ohne die die Kommunikation nicht gelingen kann:

- Wann machst du das üblicherweise?
- Immer =1 / Oft = 0.8 / Meistens = 0.6 / Manchmal = 0.4 / Selten = 0.2 / Nie = 0
- Wie finden Sie diesen Ansatz?
- Sehr gut = 1 / Gut = 0.9 / Ganz gut = 0.6 / Geht so = 0.4 / schlecht = 0.2 / Sehr schlecht = 0

Wir können auch unsere abgestufte Definition von Mutter sprachlich beschreiben:

Leibliche Mutter	=	ganz richtige Mutter
Adoptivmutter	=	richtige Mutter
Leihmutter	=	Mutter
Pflegemutter	=	beinahe Mutter
Frau nach Totgeburt	=	keine wirkliche Mutter
Frau nach Abtreibung	=	überhaupt keine Mutter
Frau, mit verstorbenem Kind	=	kommt drauf an Mutter

Auch für die Wahrheit bieten die Sprachen Abstufungen:

wahr – wahrscheinlich – möglich – vielleicht – unwahrscheinlich – unmöglich – unwahr

Diese Abstufungen können noch mit „sehr", „bestimmt", „ganz bestimmt", „sicher" und ähnlichen Wörtern bei Bedarf fein abgestuft werden. Diese Vielfalt an „unscharf" machenden Wörtern in den Sprachen belegen die Schwierigkeiten, sowohl der klassischen als auch der formalen Logik bei der Sprachbeschreibung und somit bei der Beschreibung der Wirklichkeit, die so nur über die Sprache möglich ist. Sie sind der manifeste Nachweis, daß Fuzzy Logic als Prinzip allgegenwärtig ist, seitdem es menschliche Sprachen gibt, aber vielleicht sogar der Motor der Evolution, denn „ein bißchen mehr Licht" ist für viele Pflanzen überlebenswichtig, für andere ist es „das bißchen weniger Wasser".

Allerdings sind die sprachlichen Möglichkeiten noch weit größer als die oben beschriebenen:

- Beispiel1

Morgen um 15 Uhr läuft das Schiff aus.

Der Wahrheitswert einer solchen Aussage konnte mit der aristotelischen Logik einfach nicht beantwortet werden, die formale Logik kennt den Begriff „Zeit" überhaupt nicht, aber auch die Fuzzy Logic, so wie sie bisher verwendet wird und wurde, hat hier nur ein schlappes „0.5" anzubieten.

- Beispiel 2

Abflug Ihres Flugzeugs ins Sonnenparadies Las Palmas, Freitag, 08. August 2003, 15 Uhr 12.

Den Flug haben ca. 350 Urlauber gebucht und teuer bezahlt, wenn etwas oder jemand zu dem angegebenen Datum nicht in Urlaub fliegt, dann ist es ein Urlauber, der kurz vor Abflug erkrankt oder bis zum Abflug verstirbt. Niemand unter den Urlaubsgästen käme auf die Idee, nicht zum Abflug zu erscheinen, nur weil der Zugehörigkeitsgrad gemäß Fuzzy Logic nur 50% beträgt. Aus dem Axiom der Ähnlichkeit heraus schließen (fast) alle Reiseteilnehmer auf einen planmäßigen Abflug der Maschine am 08.08.03 und keiner von Ihnen käme auf die Idee regelmäßig bei der Air Line anzurufen, um zu überprüfen, ob das Flugzeug wirklich planmäßig abfliegen wird.

- Beispiel 3

Ein Pendler fährt täglich mit der Deutschen Bundesbahn von Kaldenkirchen nach Essen, wobei er in Viersen umsteigen muß, aber einen perfekten Anschlußzug hat, auf den er nur vier Minuten warten muß. Seine Arbeit beginnt um 10 Uhr und der Zug, der um 8 Uhr 07 in Kaldenkirchen abfährt, ist perfekt. Abfahrt 8:07, an Viersen 8:28, ab Viersen 8:32, an Essen 9:18. 7 Minuten Fußweg und unser Pendler kann noch gemütlich vor der Arbeitsaufnahme frühstücken.

Leider verpaßt er mindestens zweimal pro Woche den Anschlußzug in Viersen, muß 20 Minuten auf einen anderen Zug warten (sein eigener fährt nur einmal pro Stunde), muß in Duisburg noch einmal umsteigen und landet um 9:58 in Essen auf dem Bahnhof, wenn der Zug pünktlich ist. Nach eiligen 7 Minuten erscheint er mit fünf Minuten Verspätung auf der Arbeit. Das Problem wäre keines, wenn der Anschlußzug in Viersen auf den Zug aus Kaldenkirchen warten würde, was er aber nicht macht. Also mit dem Auto nach Viersen oder gleich nach Essen fahren? Eine Stunde früher fahren und anderthalb Stunden frühstücken?

Da das Problem auf der Rückfahrt ebenfalls auftaucht, bekommt der arme Pendler in Kürze ein Problem mit seinem Chef oder seiner Frau oder mit beiden.

In allen drei Fällen haben wir es mit Fahrzeugen und Abfahrtszeiten zu tun, die in der Zukunft liegen. Alle drei Fahrzeuge können, müssen aber nicht nach Plan abfahren. Schiffe fahren üblicherweise nicht nach Plan ab, trotzdem gibt es auch solche, z.B. Fähren oder Luxusliner. Flugzeuge ab einer bestimmten Größe fliegen üblicherweise nach Plan, aber nicht die „Air Force One". Züge fahren ebenfalls üblicherweise nach Plan (außer Sonderzügen), aber die Deutsche Bundesbahn mutet ihren Kunden Wartezeiten von bis zu zwanzig Minuten zu. In den drei Fällen ändert sich die „Überzeugung bezüglich der sicheren Abfahrt" in Abhängigkeit der individuellen Bedingungen.

Wenn das Schiff ein Luxusliner ist, sind die meisten Reisenden der sicheren Überzeugung, daß das Schiff auch um 15 Uhr ausläuft, ebenso bei einem Fischerboot, aber nicht bei einem Motorboot mit Motorschaden.

Bei Linien- und Urlaubsflügen sind sich alle Passagiere ziemlich sicher, daß das Flugzeug am angegebenen Tag frühestens zur angegebenen Uhrzeit abfliegen wird. Verspätungen beim Abflug können oft auf der Strecke wieder eingeholt werden und sind nicht dramatisch, weil solche Flüge nicht täglich erfolgen und weil jeder weiß, daß Flugzeuge Verspätung haben können. Wartezeiten sind zwar unangenehm, aber schnell vergessen.

Ähnlich ist es bei Fernverkehrszügen, man kommt pünktlich zur Abfahrt, wartet eventuell eine Verspätung ab und kommt mit einer kalkulierten Verspätung an. So unwichtig zwanzig Minuten im Fernverkehr sind, so schlimm sind sie im Berufsnahverkehr. Niemand kann sich regelmäßige Verspätungen leisten, noch nicht einmal der Boss.

- Was hat das mit Sprache und Fuzzy Logic zu tun?

Sprachen bieten vielfältige und nuancierte Ausdrucksmöglichkeiten an, mit denen ein Sprecher sich zum Grad der Wahrheit eines Ereignisses äußern kann:

Ich bin mir absolut sicher,	daß ...	
Ich habe keinen Zweifel daran,	daß ...	
Ich bin mir sicher,	daß ...	Zadeh Wert = 1.0
Ich bin mir ziemlich sicher,	daß ...	
Ich halte es für höchstwahrscheinlich, .	daß ...	
Ich halte es für sehr wahrscheinlich, .	daß ...	Zadeh Wert = 0.9
Ich halte es für ziemlich wahrscheinlich,	daß ...	
Ich kann es noch gar nicht fassen,	daß ...	Zadeh Anfangswert < 0.5 Endwert 1.0
Ich kann es kaum glauben,	daß ...	Zadeh Anfangswert 0.1 Endwert 0.9
Ich glaube,	daß ...	
Ich halte es für gut möglich,	daß ...	
Ich halte es für möglich,	daß ...	Zadeh Wert = 0.6 – 0.4
Ich halte es für fast möglich	daß ...	
Ich glaube nicht,	daß ...	
Ich halte es für ziemlich unwahrscheinlich,	daß ...	
Ich halte es für sehr unwahrscheinlich, .	daß ...	Zadeh Wert = 0.1
Ich halte es für höchst unwahrscheinlich, .	daß ...	
Ich bin mir ziemlich sicher,	daß nicht ...	
Ich bin mir sicher,	daß nicht ...	
Ich habe keinen Zweifel daran,	daß nicht ...	Zadeh Wert = 0
Ich bin mir absolut sicher,	daß nicht ...	

Die obige Tabelle bietet nur einen Einstieg in die Möglichkeiten von Nuancierungen wie sie Sprachen bieten, und niemand darf erwarten, daß logische Systeme auch nur eine näherungsweise Beschreibung menschlicher Sprache liefern können. Trotzdem bietet die Fuzzy Logic einen Zugang zu sprachlicher Beschreibung, wie kaum ein anderes Modell.

- Beispiel 4

Wenn wir einen Fachmann für Heizkesselbeaufsichtung fragen, bei wieviel Grad er denn dem Kessel seine volle Aufmerksamkeit schenkt, dann antwortet er vielleicht 95 Grad, er sagt uns aber nicht, daß er trotzdem noch ans Telefon und zur Toilette geht, und was er eigentlich unter voller Aufmerksamkeit versteht. In Unkenntnis dieses Sachverhalts bauen wir einen Alarm und eine automatische Abschaltung in die Kesselsteuerung ein, wenn die Temperatur 95 Grad erreicht, und niemand innerhalb von 60 Sekunden den Entwarnungsknopf drückt. Möglicherweise geht die Anlage, dann fünfmal im Monat auf Störung, obwohl wir jeden Monat die unaufmerksame Aufsicht in eine andere Abteilung versetzen.

Die Umsetzung des Wissens eines Fachmanns in einen verfahrenstechnischen Ablauf ist mindestens genauso wichtig wie das Wissen selber. Denn meistens sind sich die Menschen nicht über die Tragweite von Randbedingungen bewußt oder setzen implizit voraus, daß der Gesprächs-

partner diese selbstverständlich auch kennt. In meiner Praxis als Anwendungsprogrammierer habe ich gelernt, daß ich mich nicht auf die Aussagen von Fachleuten verlassen kann und insbesondere habe ich gelernt, daß das implizit Mitgemeinte oft erst nach dem Einsatz der Software aufgedeckt wird. Ein Pflichtenheft schützt weder den Auftraggeber noch den Auftragnehmer, denn entweder sind die Pflichten exakt benannt, dann hat der Auftraggeber ein Problem, weil die Software nicht adäquat arbeitet, obwohl alle geforderten Eigenschaften realisiert sind, oder die Pflichten sind unklar benannt, dann muß der Auftragnehmer nachbessern und nachbessern und nachbessern.

- Beispiel 5

Auftrag: Programmierung und Installation einer Praxissoftware.

Reklamation: Das Programm zeigt immer noch nicht an, daß der Papierkorb voll ist.

- Beispiel 6

Auftrag: Einrichtung einer Kundendatenbank, Adreßfeld, Telefon, Fax, E-Mail

Reklamation: Es gibt keine Möglichkeit eine persönliche Anrede einzugeben.

Ablehnung: Das war gemäß Pflichtenheft auch nicht vereinbart.

Beide Beispiele sind natürlich maßlose Übertreibungen, aber sie verdeutlichen das Problem. Im Beispiel 5 verläßt sich der Programmierer auf die stillschweigende Übereinkunft, daß das Programm nicht jeden Ablauf einer Arztpraxis abdecken kann, im Beispiel 6 verläßt sich der Auftraggeber darauf, daß das Adreßfeld auch eine persönliche Anrede enthalten muß, die außerdem korrekt aus der Adresse gebildet werden kann.

6.4. Die linke und die rechte Hirnhälfte

> Die Aussage „Immer wenn es regnet, wird die Strasse nass." Soll wahr sein, wenn es zwar nicht regnet, die Strasse aber trotzdem nass wird. Das kann zum Beispiel sein, wenn die Strasse im Sommer durch einen Sprengwagen gespritzt wird. Allerdings ist festzustellen, dass bei fehlenden Regen und trotzdem nasser Strasse die Behauptung „Immer wenn es regnet, wird die Strasse nass." wahr bleibt. Anders ausgedrückt: Die These „Immer wenn es regnet, wird die Strasse nass." wird nicht dadurch widerlegt, dass man einen Fall findet, in dem die Strasse ohne Regen nass wird. Präzise bedeutet die Äußerung „Immer wenn es regnet, wird die Strasse nass." eigentlich „Immer wenn es regnet (aber nicht nur wenn es regnet), wird die Strasse nass." Hier zeigt sich, dass es sich nur um eine hinreichende, nicht aber um eine notwendige Bedingung handelt
>
> http://www.kues-becker.de/dateien/vorlesungen/becker/mathematik/logikimplikation.htm

> „Ich habe keine Lust permanent die Übungsaufgaben meiner Mathematik- und Physiklehrer auf sprachliche Richtigkeit und Verständlichkeit zu korrigieren."
> Der Oberstudiendirektor des Märkischen Gymnasiums in Bochum-Wattenscheid vor einigen Jahren.

Das unterstrichene und falsche „n" an dieser Stelle steht so im Original, allerdings ohne Unterstreichung und ist bestimmt ein Tipfehler.

„Präzise bedeutet die Äußerung ..." Stimmt in diesem Fall, aber nicht für die Implikation im allgemeinen. Dem passend ausgesuchten Beispiel, daß diese Überzeugung so schön belegt, kann man beliebig viele Beispielimplikationen entgegenhalten, die das genau nicht bedeuten, wie:

Immer wenn ich Marion sehe, pocht es wild in meiner Brust. (hinreichend und notwendig)

Immer wenn die Sonne scheint, treibt es mich nach draußen. (hinreichend und notwendig)

Immer wenn ich in Brüssel bin, verfahre ich mich. (hinreichend und notwendig gemeint)

Immer wenn ich dich sehe, trifft mich der Schlag. (weder hinreichend, noch notwendig, aber so gemeint)

Immer wenn ich sprachliche Beispiele von Naturwissenschaftlern sehe, rege ich mich darüber auf. (nicht hinreichend, aber notwendig und hinreichend und notwendig gemeint)

Tatsächlich gibt es einen Kausalzusammenhang zwischen Regen und Nässe, aber Regen ist natürlich nicht die einzige Ursache von Nässe.

Zwischen Marion und meinem Herzschlag gibt es keinen Kausalzusammenhang, sondern einen exklusiven Ereigniszusammenhang, deshalb ist das hinreichend und notwendig, denn wenn ich sie sehe, pocht mein Herz wie wild, aber nur, wenn ich sie sehe. (Mit „sehen" ist gemeint, daß ich mich in Marions Nähe befinde.)

Ob es mich treibt oder nicht, weiß nur ich allein, da es keine Möglichkeit zur Objektivierung gibt, muß man das dem Sprecher glauben.

Bestimmt verfahre ich mich auch an anderen Orten gelegentlich, aber es geht nicht um etwas Gelegentliches, sondern um etwas Systematisches, nämlich ich war schon oft in Brüssel, aber die Beschilderung oder Straßenführung oder sonst etwas in Brüssel führt dazu, daß ich mich in Brüssel regelmäßig verfahre.

Klar, wenn ich solche Erklärungen finde, dann rege ich mich immer auf, aber mit Sicherheit habe ich schon Texte von Mathematikern gelesen, über die ich mich nicht aufgeregt habe, z.B. eine Weihnachtskarte oder eine Einladung oder einen normalen Brief. Da ich mich sonst aber nie aufrege ist die Bedingung zwar notwendig, aber nicht hinreichend, wenn auch hinreichend gemeint, denn wenn ich diesen Satz äußere, dann vergesse ich alle normalen Texte von Naturwissenschaftlern.

Wie ist es möglich, daß Menschen, die so pingelig bezüglich Beweisverfahren sind, so nachlässig mit der Sprache umgehen?

Wie ist es möglich, daß Menschen, die so pingelig im Sprachgebrauch sind, wie Chefredakteure großer Zeitschriften wie dem Stern, so nachlässig mit der Objektivität umgehen wie zur Zeit anläßlich des Irakkrieges?

- Beispielbeweis 1

Behauptung: $2n < n^2$ für alle $n > 2$

1. Beweis für ein beliebiges $n > 2$, z.B „3" ergibt $2*3 < 3^2$
2. Annahme $2n < n^2$ für alle $n > 2$ ist wahr
3. Beweis für $(n+1)$ => $2(n+1) < (n+1)^2$
   $2n+2 < n^2+2n+1$ Rest trivial

Ja, für euch, liebe Mathematiker, ist das trivial, aber nicht für uns.

- Beispielbeweis 2

„Herr Scholl-Latour, vor einer Woche haben Sie bei uns gesagt, daß der Irakkrieg noch sehr lange dauern wird, was sagen Sie jetzt angesichts der aktuellen Entwicklung?"

„Das habe ich nie so gesagt, und wenn ich es so gesagt habe, dann habe ich es nicht so gemeint." (Sinngemäße Wiedergabe aus der Sendung „Der grüne Salon" vom 07.04.2003)

„Wann denn, Herr Scholl-Latour, meinen Sie denn, was Sie sagen?" – „Jedesmal, wenn ich etwas sage, aber ich passe meine Meinung immer dem aktuellen Geschehen an." (Fiktive Frage und Antwort)

Geniale und wahrheitsgemäße Antworten des bekannten Journalisten und Nahost Experten, und eigentlich ist es auch sehr vernünftig, seine Meinung der Wirklichkeit anzupassen, ...

Aber, ...

„Ja, was denn aber?" Es gibt kein „aber" und außerdem ist das „trivial".

Vielleicht für euch Sprachakrobaten und Wortverdreher, aber nicht für uns.

„Und was ist mit Tieh?" würden jetzt alle anderen sagen. „Ja, beim Tee auch."

Man vermutet sehr stark, daß die linke und die rechte Gehirnhälfte des Menschen unterschiedliche Aufgaben haben und wahrnehmen. Einschlägige Versuche zeigen, daß die rechte Hirnhälfte für mathematische und naturwissenschaftliche Aufgaben bestens gerüstet ist und für den Tunnelblick sorgt, die linke Hirnhälfte dagegen für das Sprachvermögen, das folgerichtige Denken und den Breitenblick. Weiterhin vermutet man, daß bei sehr vielen Menschen jeweils eine der beiden Hirnhälften dominant ist, d.h. rechts dominante Menschen können bestens mit Symbolen umgehen, aber nicht mit Sprache, zielgerichtet sind, aber ihre Umgebung nur eingeschränkt wahrnehmen, links dominante Menschen dagegen plaudern um des Plauderns willen, lernen Fremdsprachen ohne Probleme und können sehr überzeugend argumentieren, außerdem sind sie Konsens orientiert und achten sehr auf ihre Umgebung.

Der „zerstreute Professor" ist der Prototyp des rechtsdominanten Typs.

Die „Kaffeetante" ist der Prototyp des linksdominanten Typs.

Wenn Sie mir immer noch nicht glauben, dann werde ich Sie mit zwei weiteren Beispielen zu überzeugen versuchen.

- Beispiel 1

Ich teste immer wieder Anwendungen aus dem Bereich der Sprachvermittlung, u.a. auch Vokabeltrainer (Ich habe noch keinen brauchbaren gefunden, sollte das an der Rechtsdominanz von Programmierern liegen?).

Frage des Programms:	„Wie heiß Nacht auf Französisch?"
Meine Antwort:	„Nuit"
Antwort des Programms:	„Falsch"
Richtige Antwort:	„la nuit"

Offensichtlich konnte der Programmierer kein Französisch und hat einfach aus einem Lernwörterbuch abgeschrieben, aber in solchen Wörterbüchern wird immer der Artikel eines Nomens in der Zielsprache mitgenannt, d.h. Nacht = la nuit ist so gar nicht von dem Wörterbuch gemeint, sondern gemeint ist: Nacht = nuit und nuit ist weiblich.

- Beispiel 2

> Obwohl die natürliche Sprache vielleicht die für den Menschen am einfachsten verständliche Wissensdarstellung ist, ist es für den Computer sicherlich nicht die beste, da Sprache gewöhnlich mehrdeutig ist. Das heißt es kann passieren, dass zwei Menschen die gleiche Aussage lesen und sich über deren Bedeutung nicht einig sind. Diese Mehrdeutigkeit ist der Grund dafür, dass während der letzten zwei Jahrtausende die Sprache der formalen Mathematik und Logik entwickelt wurde. (Joseph Bigus, Jennifer Bigus, *Intelligente Agenten mit Java programmieren*, Addison-Wesley München, 2001, Seite 96)

Wenn die natürliche Sprache wegen ihrer Mehrdeutigkeit für einen Computer unbrauchbar wäre, dann wäre sie auch für den Menschen unbrauchbar, was aber in dem Zitat bestritten wird.

Die natürliche Sprache ist deshalb für Computer unbrauchbar, weil diese sie bis heute nicht gelernt haben, und Computer haben sie noch nicht gelernt (noch nicht einmal ansatzweise), weil wir es ihnen nicht haben beibringen können. Das hat u.a. auch technische Gründe.

Es ist zwar richtig, daß es in Sprachen Mehrdeutigkeiten gibt, z.B. auf der „Wortebene" (häufig) (das deutsche Wort schloß hat drei Bedeutungen: Das Schloß Neuschwanstein – das Türschloß – der Dieb schloß die Tür auf), auf der „Satzebene" (sehr selten) (Ich habe in Frankfurt L/liebe G/genossen.) auf der Textebene (nur mit kurzen sehr konstruierten Beispielen).

Aber diese Mehrdeutigkeiten sind fast nie der Grund für Mißverständnisse, schlimmstenfalls kann man das Problem durch einfache Nachfrage klären. Häufiger sind Probleme mit unterschiedlicher Bedeutung in den Köpfen der Gesprächspartner, was z.B. bei automatischen Übersetzungen ein großes Problem ist. „Ich habe Recht." hat ein Übersetzungsäquivalent im Französischen, nämlich „J'ai raison.", das aber bedeutet wortwörtlich im Französischen „Ich habe Vernunft.". Der Deutsche beruft sich auf das „Recht", wenn er Recht hat, der Franzose auf die „Vernunft",

deshalb gibt es keine Übersetzung für das deutsche Wort „Rechthaber" im Französischen, denn wenn jemand mit vernünftigen Argumenten überzeugt, ist er eben kein Rechthaber, sondern jemand der „nur" Recht hat.

Die Autoren des Zitats haben ein Problem mit dem Wort „Bedeutung", denn es gibt mindestens zwei Arten von „Bedeutung", nämlich die lexikalische Bedeutung, über die sich Gesprächspartner der selben Sprache weitgehend einig sind und die „konkrete Bedeutung" in einem realen Text. So wird jeder deutsche Native zweifellos das Wort „wichtig" verstehen, aber in dem Satz „Die UNO wird eine wichtige Bedeutung beim Wiederaufbau des Irak spielen." besteht ein breiter Interpretationsspielraum des Wortes „wichtig" in Zusammenhang mit Bedeutung, UNO, Wiederaufbau und Irak.

Dieser Interpretationsspielraum ist aber nicht ein eingebauter Fehler in den Sprachen, sondern eine zwingende Notwendigkeit, denn nur so kann man sich auf eine gemeinsame Absichtserklärung einigen, ohne im Voraus schon definitiv festzulegen, welche Rolle die UNO beim Wiederaufbau des Iraks tatsächlich spielen wird. Wie konkret „wichtige Rolle" später sein wird ist zu diesem Zeitpunkt irrelevant, aber „wichtige Rolle" legt alle Parteien auf etwas fest, was eine Rolle und was wichtig in irgendeinem konsensfähigen Sinn ist. Computer sind gewöhnlich aber weder kompromißbereit noch konsensfähig, es macht keinen Sinn mit ihnen zu verhandeln, sie zu loben oder zu bestrafen. Mein PC wird nicht für mich diesen Text zu Ende schreiben, wenn ich ihm die Pistole auf die Brust setze.

Übrigens sollten sie jetzt schon wissen, daß die Entwicklung der formalen Logik (wenn auch erst seit ca. 150 Jahren) nicht das Geringste mit der Mehrdeutigkeit von Sprachen zu tun hat, sondern mit der Unmöglichkeit, sprachlichen Aussagen eindeutige Wahrheitswerte zuzuordnen.

> Für Howard Gardner offenbarte sich in diesem intellektuellen Abenteuer auch eine Ironie der Geschichte. Nach Tausenden von Jahren hatte der Mensch durch die Computer endlich das Mittel in der Hand, die klassische Vorstellung von Logik und Sprache mechanisch nachzubilden. Doch eben in jenem Moment zerfiel diese Vorstellung; die Computer zwingen den Menschen, seinen Glauben an die Exaktheit der Begriffe und Definitionen ernst zu nehmen, und als der Mensch sich auf die Suche nach diesen exakt definierten Begriffen und ihren scharf gezogenen Grenzen machte, stellte er fest, daß sie nicht existieren und noch nie existiert haben.[18] Sokrates, John Lock, der frühe Wittgenstein – sie hatten Fronarbeit für eine große Illusion geleistet. (Daniel McNeill, Paul Freiberger, *Fuzzy Logic*, Knaur München 1996, Seite 144.)

6.5. Mengen Operationen mit Zadeh-Mengen

Wenn man Zadeh Mengen als Oberbegriff der Cantorschen Mengen betrachtet, dann kann man Cantor Mengen als Zadeh-Mengen aufschreiben und muß bei jeder Mengenoperation zum gleichen Ergebnis kommen, wie im Kapitel 3 dargestellt. Wenn „A" ein Mengenobjekt in einer Cantor Menge ist, dann ist „(A,1)" das Mengenobjekt einer äquivalenten Zadeh Menge, wobei „A" das Objekt unserer Anschauung oder unseres Denkens ist. Wenn ich es nicht explizit anders angebe, dann meine ich weiterhin mit dem Objekt einer Menge den linken Teil eines Zadeh-Tupels.

In (A, 0.5) ist *A* das Objekt einer Menge und *0.5* der Zugehörigkeitsgrad dieses Objekts zu dieser Menge, aber Element der Menge ist grundsätzlich (A, 0.5).

Zunächst zeige ich die Mengenoperationen nur formal, um zu zeigen nach welchen Prinzipien sie funktionieren, d.h. ich verwende zunächst ausschließlich willkürliche Mengen in ihrer gesamten Extension.

- Die Vereinigungsmenge (Die *oder* Operation)

Wenn $\mathbf{M_1}$**={(A,1), (B,1), (C,1)}** und $\mathbf{M_2}$**={(C,1), (D,1), (E,1)}** dann ist die Vereinigungsmenge $\mathbf{M_1} \cup \mathbf{M_2}$**={(A,1), (B,1), (C,1), (D,1), (E,1)}**. Die Vereinigungsmenge von zwei Mengen M_1 und M_2 enthält alle Elemente beider Mengen, ist ein Element (hier (C,1)) sowohl Element von M_1 und M_2,

dann wird es nur einmal übernommen, weil entsprechend der Definition der Menge, alle Elemente wohl unterschieden sein müssen.

Wenn **M_1={(A, 0.9), (B, 0.5), (C, 0.8)}** und **M_2={(C, 0.9), (D, 0.2), (E,0.6)}** dann ist die Vereinigungsmenge **$M_1 \cup M_2$={(A, 0.9), (B, 0.5), (C, 0.9), (D, 0.2), (E, 0.6)}**. Die Vereinigungsmenge von zwei Mengen M_1 und M_2 enthält alle Elemente beider Mengen, ist ein Objekt (hier C) sowohl Element von M_1 und M_2, dann wird es nur einmal und zwar mit dem größten Zugehörigkeitsgrad übernommen, nämlich als (C, 0.9), weil 0.9 > 0.8.

Wendet man die Regeln Zadeh's auf die Cantor Mengen an, erhält man dasselbe Ergebnis wie bei der klassischen Mengenlehre.

- Die Schnittmenge (Die *und*Operation)

Wenn **M_1={(A,1), (B,1), (C,1)}** und **M_2={(C,1), (D,1), (E,1)}** dann ist die Schnittmenge **$M_1 \cap M_2$={(C,1)}** . Die Schnittmenge von zwei Mengen M_1 und M_2 enthält alle Elemente die sowohl Element von M_1 und M_2 sind. Haben M_1 und M_2 keine gemeinsamen Elemente, dann ist die Schnittmenge **$M_1 \cap M_2 = \varnothing$** eine leere Menge, d.h. eine Menge ohne Elemente. Da entsprechend der Definition von Mengen alle leeren Mengen dieselben Elemente enthalten, handelt es sich immer um die selbe Menge, man nennt $\varnothing$ deshalb die leere Menge.

Wenn **M_1={(A, 0.9), (B, 0.5), (C, 0.8)}** und **M_2={(C, 0.9), (D, 0.2), (E,0.6)}** dann ist die Schnittmenge **$M_1 \cap M_2$={(C, 0.8)}** . Die Schnittmenge von zwei Mengen M_1 und M_2 enthält alle Objekte, die sowohl Objekt von M_1 und M_2 sind (hier C). Da jedes dieser Objekte auch einen Zugehörigkeitsgrad enthält, wird bei der Schnittmenge der kleinste der Zugehörigkeitsgrade gewählt, in diesem Fall (C, 0.8).

Wendet man die Regeln Zadeh's auf die Cantor Mengen an, erhält man dasselbe Ergebnis wie bei der klassischen Mengenlehre.

- Die Komplementärmenge (Die *nicht* Operation)

Wenn **M_1={(A,1), (B,1), (C,1)}** dann ist die Komplementär Menge von **M_1**, **M_{c1}={(A,0), (B,0), (C,0)}**, also die leere Menge.

Wenn **M_1 ={(A, 0.9), (B, 0.5), (C, 0.8)}** dann ist die Komplementärmenge von **M_1**
= **M_{c1}={(A, 0.1), (B, 0.5), (C, 0.2)}.**

Man erhält die Komplementärmenge einer Zadeh-Menge, in dem man die Zugehörigkeitsgrade der Elemente von **M_1** von „1" subtrahiert:

M_{c1}={(A,1-0.9), (B,1-0.5), (C,1-0.2)}

Ob in diesem Fall die Anwendung der Zadeh Regeln zu einem anderen Ergebnis führt als die klassische Mengenlehre, können wir hier noch nicht entscheiden, denn die Komplementärmenge von **M_1={A, B, C}** ist nicht ohne eine Obermenge von **M_1** bestimmbar.

In diesem Punkt ist die Definition der Komplementärmenge durch Zadeh umfassender als die von Cantor, denn diese müßte eine „Allmenge M_A" postulieren, so daß **$M_{c1} = M_A \setminus M_1$** (Lies M_A ohne M_1). Eine solche Allmenge kann es aber nicht geben, denn sie führt zu einem Zirkelschluß. Man könnte hier jetzt etwas gewagt postulieren, daß die Komplementärmenge jeder willkürlichen Cantor Menge die leere Menge ist. Wir könnten auf diese Weise eine offensichtliche Lücke in der Cantorschen Mengenlehre schließen. (Vielleicht ist diese Lücke aber schon längst geschlossen, auf diese oder eine andere Weise, dann bitte Nachricht an den Autor.)

Aus diesem Grunde habe ich auch im Kapitel 3 die Komplementärmenge mit einer nicht willkürlichen Menge erklärt, nämlich mit den natürlichen Zahlen.

- Die Teilmengen und Obermengen Eigenschaften

Wenn M_1={(A,1), (B,1), (C,1)} und M_{11}={(A,1)}, M_{12}={(B,1)}, M_{13}={(C,1)}, M_{14}={(A,1), (B,1)}, M_{15}={(A,1), (C,1)}, M_{16}={(B,1), (C,1)}, dann sind M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{15} und M_{16} echte Teilmengen von M_1, und M_1 ist eine echte Obermenge von M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{15} und M_{16}.

Ist die Teilmenge M_T={(A,1), (B,1), (C,1)} identisch mit der Menge M_1, dann ist M_T eine unechte Teilmenge von M_1 und M_1 eine unechte Obermenge von M_T.

Wenn M_1={(A, 0.9), (B, 0.5), (C, 0.8)} und M_2={(A, 0.8), (B, 0.4), (C,0.6)}, dann ist M_2 eine echte Teilmenge von M_1.

Eine Menge M_T ist eine Teilmenge von **M**, wenn jedes Objekt von M_T einen kleineren oder gleichen Zugehörigkeitsgrad aufweist, wie das entsprechende Objekt von **M**. Haben alle Objekte von **M** und M_T den selben Grad an Zugehörigkeit, dann ist M_T eine unechte Teilmenge von **M**.

Wenn M_1={(A, A_1), (B, B_1), (C, C_1)} und M_T={(A, A_T), (B, B_T), (C, C_T)}, dann ist M_T Teilmenge von M_1, wenn $A_T \leq A_1$ **und** $B_T \leq B_1$ **und** $C_T \leq C_1$. Auch in diesem Fall ist die Zadeh Teilmenge/Obermenge umfassender als die Cantor Teilmenge/Obermenge.

Wenn A_1, B_1 und C_1 den Wert „1" haben, dann ist M_O eine allgemeine Obermenge zu allen Zadeh Mengen mit den Objekten **A**, **B** und **C**. Insoweit ist jede Cantor Menge eine allgemeine Obermenge zu der entsprechenden Zadeh Menge.

Wenn man die Mengen M_{12}={(B,1)}, M_{13}={(C,1)}, M_{14}={(A,1), (B,1)}, M_{15}={(A,1), (C,1)}, M_{16}={(B,1), (C,1)}, vollständig aufschreibt, erkennt man sofort, daß auch die echten Cantorschen Teilmengen der Zadeh Regel genügen:

M_{11}={(A,1), (B,0), (C,0)}
M_{12}={(A,0), (B,1), (C,0)}
M_{13}={(A,0), (B,0), (C,1)}
M_{14}={(A,1), (B,1), (C,0)}
M_{15}={(A,1), (B,0), (C,1)}
M_{16}={(A,0), (B,1), (C,1)}

Hier liegt technisch gesehen ein großes Problem, denn jede Cantor Menge mit „n" Elementen hat schon n-Fakultät echte Teilmengen, d.h. eine Menge von 10 Elementen hat schon 3.628.800 echte Teilmengen, die Anzahl der Zadeh Teilmengen ist aber um ein nicht genau bestimmbares Vielfaches größer.

Wenn wir diese Regeln aber auf intensional bestimmte Mengen anwenden, bekommen wir Probleme.

6.6. Fuzzy Logic und intensionalen Mengen

Die Menge aller großen Männer ist in der Cantorschen Mengenlehre eine echte Teilmenge der Menge aller Männer, wenn wir nur einen Mann finden, der nicht groß ist.

Wenn wir in diesem Fall die Regeln von Zadeh verwenden würden, bekommen wir ein unhaltbares Ergebnis.

Die Zadeh Menge aller großen Männer enthalte Elemente der folgenden Art:
M_{GM} = {(Fritz, 0.95), (Fred, 0.90), (Jean, 0.87),..., (Anatole, 0.20), (Dino, 0.15), (Rainer, 0.06)}

Die Zadeh Menge aller Männer enthalte Elemente der folgenden Art:
M_M = {(Fritz, 1), (Fred, 1), (Jean, 1), (Anatole, 1), (Dino, 1), (Rainer, 1), ... }
wobei die Namen für reale Männer stehen und gleicher Name auch gleicher Mann bedeute.

Die Menge aller großen Männer ist danach ebenso eine Teilmenge aller Männer wie bei Cantor, d.h. formal führt das zu einem richtigen Ergebnis. Das Ergebnis bleibt auch richtig, wenn wir die Schnittmenge und die Vereinigungsmenge der beiden Mengen bilden, denn

$$M_M \cap M_{GM} = M_{GM} \text{ und } M_M \cup M_{GM} = M_M$$

Auch bei der Bildung der Komplementärmenge funktioniert die Methode, denn das Komplement von M_{GM}

M_{CGM} = {(Fritz, 0.05), (Fred, 0.10), (Jean, 0.13),..., (Anatole, 0.80), (Dino, 0.85), (Rainer, 0.94)}

kann man als die Menge der „Nicht" großen Männer betrachten, wobei definitionsgemäß die Riesen, die einen Zugehörigkeitsgrad von „1" zur Menge der großen Männer haben, getilgt werden müssen.

Aber beim Komplement aller Männer erhalten wir ein etwas unverständliches Ergebnis, denn in dieser Menge finden wir ausschließlich alle nicht ganz „richtigen" Männer wieder, z.B. alle männlichen nicht erwachsenen Menschen oder alle Tunten oder alle Eunuchen oder alle anderen Männer, denen irgend etwas an der Männlichkeit fehlt, aber nicht wie man erwarten könnte auch alle weiblichen Menschen.

Bei intensionalen Cantor Mengen müssen wir eine echte Obermenge zur Menge aller Männer finden, z.B. die Menge aller Menschen. Das Komplement zur Menge aller Männer ist dann die Differenzmenge der Mengen **Menschen \ Männern** (lies Menschen ohne Männer) und führt zu einer ganz anderen Menge als die entsprechende Zadeh Menge.

Weiter oben haben wir festgestellt, daß das Komplement einer willkürlichen Cantor Menge die leere Menge ist, wenn wir die Regeln von Zadeh auf diese anwenden, in diesem Fall ist das genauso, denn die Cantor Menge „aller Männer" enthält nur Männer mit dem Zugehörigkeitsgrad „1", die alle bei der Komplementbildung getilgt werden. Daraus folgt dann, weil alle Elemente von Cantor Mengen den Zugehörigkeitsgrad „1" haben, daß das Komplement aller Cantor Mengen die leere Menge ist. In diesem Fall führt die Anwendung der Zadeh Regeln auf traditionelle Mengen nicht zu einer Erweiterung der Mengenlehre von Cantor, sondern zu einer erheblichen Einschränkung.

Das Problem liegt zunächst einmal darin, daß die Eigenschaft „Mann" eine abgestufte (diskrete) Eigenschaft ist, die Eigenschaft „Größe" aber eine analoge Eigenschaft, deshalb haben auch alle ausgewählten Personen den Zugehörigkeitsgrad „(Mann, 1)", sie sind einfach alle Männer, deshalb führt die Differenzbildung zu dem Wert „(Mann, 0)" und muß getilgt werden.

Um eine Lösung für das Problem zu finden, müssen wir die Definition der Zadeh Mengen erweitern oder noch einmal über „Unschärfe" nachdenken.

Wir könnten z.B. in die „Menge aller Männer" auch die Frauen, Kinder und Jugendlichen aufnehmen, in dem wir z.B. den Frauen den Zugehörigkeitsgrad „0.10", den männlichen Jugendlichen den Grad „0.20", den weiblichen Jugendlichen und den männlichen Kindern den Grad „0.08" und den weiblichen Kindern den Grad „0.05" zuordnen. Das würde unser Problem zunächst lösen, aber warum ist eine Frau mehr „Mann" als z.B. ein Kater? Unter dem Gesichtspunkt das Frauen Menschen sind bestimmt, aber vielleicht nicht unter dem Gesichtspunkt des männlichen Verhaltens. Außerdem ist die Verteilung der Zugehörigkeitsgrade vollkommen atypisch, denn wir bekommen sehr viele Elemente mit dem Zugehörigkeitsgrad „1", und noch mehr mit einem Zugehörigkeitsgrad von <"0.21", dafür aber so gut wie keine mit einem mittleren Zugehörigkeitsgrad.

Zadeh hat, obwohl er alle Kollegen aufgefordert hatte, Verbesserungen einzubringen, offensichtlich nur an die Modifikation der Unschärfe gedacht. Von anderer Seite ist zwar immer wieder auch eine andere Lösung vorgeschlagen worden, aber ohne großen Nachhall. Das mag daran liegen, daß die Unschärfe Lösung immer noch praktikabel ist oder daß man das in der Anwendung nicht so genau nehmen muß und diese Lösung einfacher ist, sie ist aber keinesfalls befriedigender.

Wir müssen lediglich unsere Ausgangsmengen etwas modifizieren, dann wird das Problem offenkundig:

Die Zadeh Menge aller großen Männer enthalte Elemente der folgenden Art:

M_{GM} = {(Fritz, 0.95), (Fred, 0.90), (Jean, 0.87),..,(Anatole, 0.20), (Anna, 0.15), (Rainer, 0.06)}

Die Zadeh Menge aller Männer enthalte Elemente der folgenden Art:
M_M = {(Fritz, 1), (Fred, 1), (Jean, 1), (Anatole, 1), (Anna, 0.10), (Rainer,1), ... }
wobei die Namen für reale Männer stehen und gleicher Name auch gleicher Mann bedeute.

In diesem Fall ist die Menge aller großen Männer keine Teilmenge der Menge aller Männer mehr, denn „Anna" gehört mit dem Grad „0.15" zwar der Menge aller großen Männer an, mit dem Grad „0.10" auch der Menge aller Männer an, weil aber 0.15 größer als 0.10 ist, ist die Menge aller großen Männer keine Teilmenge der Menge aller Männer mehr, das widerspricht aber massiv unserer Intuition. Genausowenig entsprechen die Vereinigungsmenge und die Schnittmenge unserer Intuition:

$M_V = M_M \cup M_{GM}$ enthält das Element (Anna, 0.15), und deshalb ist $M_V \neq M_M$

M_V = {(Fritz, 1), (Fred, 1), (Jean, 1), (Anatole, 1), (Anna, 0.15), (Rainer,1), ... }
$M_S = M_M \quad M_{GM}$ enthält das Element (Anna, 0.10), und deshalb ist $M_S \neq M_{GM}$
M_S = {(Fritz, 0.95), (Fred, 0.90), (Jean, 0.87),..., (Anatole, 0.20), (Anna, 0.10), (Rainer, 0.06)}

Die Vereinigungsmenge (Menge aller Männer) enthält Anna mit ihrer Größenzugehörigkeit und die Schnittmenge (Menge aller großen Männer) enthält Anna mit ihrer Zugehörigkeit zur Menge aller Männer.

Die Anwendung der Unschärfe Methode ist nur dann anwendbar, wenn die Elemente der großen Männer vorher sorgfältig ausgesucht sind, das geht aber nur bei kleinen Mengen. Also brauchen wir eine andere Lösung für das Problem.

Ich möchte noch einmal betonen, daß normalerweise unser Vorverständnis und Sachverstand uns davor schützt, solche Mengen zu bilden, wie ich sie oben gebildet habe, aber viele der Beispiele in der Literatur, sind ähnlich wie das Beispiel „Wenn es regnet, wird die Straße naß." sehr sorgfältig ausgesucht, aber manchmal werden auch absurde Beispiele ohne Prüfung gebracht. Allerdings sind ausgesuchte Beispiele noch nie der Beweis für die Richtigkeit einer Behauptung gewesen.

Zumindest drei verschiedene Fälle müssen wir unterscheiden, wenn wir das Komplement, die Vereinigung und den Durchschnitt von Zadeh Mengen bestimmen wollen.

1. die beiden Eigenschaften sind willkürlich, d.h. sie haben höchstens in einem sehr weiten Sinn miteinander zu tun.
2. die beiden Eigenschaften sind Antonyme, d.h. sie bedeuten jeweils des Gegenteil des anderen. (z.B. „groß" – „klein")
3. die eine Eigenschaft ist eine Untermenge der anderen Eigenschaft. (z.B. Größe und „Mann" sein.

- Zadeh Mengen bei willkürlichen Eigenschaften

Es ist nicht wichtig, ob die Eigenschaften grundsätzlich willkürlich sind, sondern nur ob sie bei einer gegebenen Fragestellung willkürlich sind. Nehmen wir die Menge aller Golfspieler und die Menge aller Tennisspieler. Natürlich sind Golf und Tennis beides Sportarten, trotzdem macht es zumindest Sinn, beide Gruppen insgesamt anzusprechen oder nur die Gruppe anzusprechen, die beides betreibt, d.h. die Vereinigungs- und die Durchschnittsmenge und zwar in Abhängigkeit der anzubietenden Produkte.

Beispiel 1

Die Menge der Golfspieler sei:
M_G = {(Fritz, 0.90), (Marie, 0.85), (Jean, 0.80),..,(Anatole, 0.20), (Anna, 0.15), (Rainer, 0.06)}

Die Menge der Tennisspieler sei:
M_T = {(Anna, 0.90), (Marie, 0.80), (Anatole, 0.80),..,(Fritz, 0.20), (Jean, 0.15), (Rainer, 0.10)}

Die Vereinigungsmenge $M_V = M_T \cup M_G$
= {(Fritz, 0.90), (Anna, 0.90), (Marie, 0.85), (Anatole, 0.80), (Jean, 0.80),..., (Rainer, 0.10)}
liefert uns alle Menschen, die entweder kräftig Golf oder Tennis spielen oder beides viel zu wenig.

Die Schnittmenge $M_S = M_T \cap M_G$
= {(Marie, 0.80),..., (Anatole, 0.20), (Fritz, 0.20), (Anna, 0.15), (Jean, 0.15), (Rainer, 0.06)}
liefert uns alle Menschen, die beides betreiben oder eines von beiden nur ein bißchen.

Bespiel 2:

Die Menge der großen Menschen sei:
M_G = {(Fritz, 0.90), (Marie, 0.85), (Jean, 0.80),..,(Anatole, 0.20), (Anna, 0.15), (Rainer, 0.06)}

Die Menge der dünnen Menschen sei:
M_D = {(Anna, 0.90), (Marie, 0.80), (Anatole, 0.80),..,(Fritz, 0.20), (Jean, 0.15), (Rainer, 0.10)}

Die Vereinigungsmenge $M_V = M_D \cup M_G$
= {(Fritz, 0.90), (Anna, 0.90), (Marie, 0.85), (Anatole, 0.80), (Jean, 0.80),..., (Rainer, 0.10)}
liefert uns alle Menschen, die entweder dünn oder groß sind oder dick und klein.

Die Schnittmenge $M_S = M_D \cap M_G$
= {(Marie, 0.80),..., (Anatole, 0.20), (Fritz, 0.20), (Anna, 0.15), (Jean, 0.15), (Rainer, 0.06)}
liefert uns alle Menschen, die dünn und groß sind oder die Menschen, die entweder dick oder klein sind.

Die Eigenschaften des „dünn Seins" und des „groß Seins" sind unabhängig voneinander, denn:

Große Menschen können dünn sein.

Große Menschen können *nicht* dünn (dick) sein.

Dünne Menschen können groß sein.

Dünne Menschen können *nicht* groß (klein)sein.

Nicht große (kleine) Menschen können dünn sein.

Nicht große (kleine) Menschen können *nicht* dünn (dick) sein.

Nicht dünne (dicke) Menschen können groß sein.

Nicht dünne (dicke) Menschen können *nicht* groß (klein) sein.

Zadeh Mengen bei Antonymen

Um die Lesbarkeit oben zu verbessern habe ich jeweils hinter *nicht* groß (klein) und hinter *nicht* dünn (dick) geschrieben. Groß und klein sowie dick und dünn sind Antonyme, d.h. Wörter, die die gleiche skalierbare Eigenschaft, aber von gegensätzlichen Standpunkten aus beschreiben.

Mann und Frau sind keine Antonyme, weil die Eigenschaft des Geschlechts nicht wirklich skalierbar ist. Wir können sie an den Rändern unscharf machen, aber nicht im Prinzip. Ein Eunuch ist wesentlich mehr „Mann" als das hartgesottenste Mannweib, das aber sehr viel mehr Frau ist als jede „Tunte". Das gilt nicht nur für die biologische Einteilung, sondern auch für das Aussehen, den Charakter und die Denkweise. Natürlich kann man das Aussehen und das Verhalten des anderen Geschlechts nachahmen, aber es bleibt eine gute schauspielerische Leistung.

Die Eigenschaft der Größe ist in einem bestimmten Bereich beliebig skalierbar, z.B. liegt die Größe einer erwachsenen deutschen Frau ungefähr zwischen 1,50 m und 1,85 m mit einer deutlichen Häufung im Bereich 1,60 m bis 1,70 m. Beim erwachsenen deutschen Mann ist es ähnlich, d.h. ungefähr zwischen 1,60 m und 2,05 m mit einer deutlichen Häufung zwischen 1,75 und 1,85. Mit „groß" wird jeweils der obere Bereich bezeichnet und mit „klein" der untere. Die Verteilung der Zugehörigkeitsgrade darf aber nicht mathematisch berechnet werden, sie sind nicht

proportional zur realen Größe, denn für Männer ist „groß Sein" eine eher positive Eigenschaft, für Frauen ist „groß Sein" eine negative Eigenschaft, beim „klein Sein" ist es genau umgekehrt.

Das „groß Sein" beginnt sehr langsam bei den Männern bei 1,70 m, steigt gleichmäßig bis 1,85 m und steigt denn schnell an. Bei den Frauen beginnt es ziemlich abrupt bei 1,70 m und steigt schnell weiter.

Wenn man „groß sein" als unscharfe Menge darstellen will, muß man diese Faktoren berücksichtigen. Ich würde deshalb folgende Skalierung für die Deutschen vorschlagen:

Mann (groß sein) def mit >1,90 = 1 1,85 = 0.8 1,80 = 0,7 1,75 = 0,6 1,70 = 0,5

Frau (groß sein def mit >1,75 = 1 1,70 = 0,7 1,65 = 0,3 1,60 = 0,2 1,55 = 0,1

Mann (klein sein) def mit <1,65 = 1 1,70 = 0,5 1,75 = 0,1

Frau (klein sein) def mit <1,55 = 1 1,60 = 0,6 1,65 = 0,2

Diese Skalierung definiert bestimmte Ankerpunkte, die auch psychologisch wichtig sind, d.h. sie sind den Menschen als Übergangswerte bewußt. Zwischen diesen Ankerpunkten kann man die Zugehörigkeitsgrade proportional bestimmen. Selbstverständlich müssen diese Zahlen korrigierbar und anpaßbar sein. Die richtige Größe wird auch durch modische Faktoren, Alter und Beruf bestimmt, nicht zuletzt auch durch die richtigen Proportionen. Auf keinen Fall kann man die Werte sozusagen mathematisch sauber proportional verteilen und noch weniger Kultur unabhängig. Diese Skalierung gilt nur für deutsche Männer und Frauen, sie kann weder auf Italiener noch auf US-Amerikaner übertragen werden.

Wie sehr die Größe psychologisch bestimmt ist, kann man auch aus der Modellpolitik der Autohersteller ableiten. Als der VW Golf 1972 auf dem Markt kam, wurde er als Kleinwagen eingeführt. Seine Nachfolger wurden immer größer und teurer. Heute ist der Golf ein Auto der Mittelklasse, der Klasse, in der 1972 ein Ford M16 (Mondeo), ein Opel Rekord (Vectra), ein BMW 1600 (dreier Reihe) und ein Renault R16 (Laguna) waren, die alle heute in der gehobenen Mittelklasse fahren, zu der damals ein Audi 100 (A4), BMW 2000 (fünfer Reihe), ein Mercedes 230 oder ein Opel Kapitän gehörten.

Außerdem muß man beachten, daß Antonyme nicht beliebig sind, sondern jeweils sprachlich genau festgelegte Paare. So ist „riesig" kein Antonym zu „klein" und „winzig" keines zu „groß". In der Wirklichkeit ist „niedrig" ein Antonym zu „hoch" (hohe Mauer – niedrige Mauer), aber nicht in der deutschen Sprache. Umfassende psycholinguistische Tests zeigen, daß im Deutschen das Antonym von „hoch" „tief" ist, und nicht „niedrig", wohingegen im Französischen „niedrig" das Antonym von „hoch" ist und „warm" das Antonym von „kalt". Im Deutschen ist „heiß" das Antonym von „kalt" und nicht „warm".

Da die psychologische Einordnung von Antonymen für alle Antonyme gilt, so ist z.B. im August eine Temperatur von 30° in Sevilla oder Sofia eher unerwartet kühl als besonders heiß, dieselbe Temperatur in Frankfurt zur gleichen Zeit aber schon ziemlich heftig. Als ich zum ersten mal zu Weihnachten nach Sofia geflogen bin, war es in Frankfurt 13° kalt, und ich entsprechend angezogen, 2 Stunden später in Sofia bin ich bei –12° ausgestiegen und habe erbärmlich gefroren (Temperaturdifferenz –25°). Die Temperaturskala in den Ebenen von NRW ist vollkommen anders als z.B. die im Osten der USA oder in Schleswig Holstein, dementsprechend anders ist auch die konkrete Vorstellung von „heiß" und „kalt" in diesen Gebieten. Demzufolge kann der Zugehörigkeitsgrad zu einer Zadeh Menge „heiß Sein" nicht einfach eins zu eins durch eine Temperaturskala bestimmt werden, sondern muß immer sprachlich gefiltert werden. Hieraus ergeben sich unmittelbare Konsequenzen für die Festlegung der Zugehörigkeitsgrade von Antonymen:

1. Sie sind abhängig von der Sprache.
2. Sie sind abhängig von der Bewertung durch Menschen.
3. Sie sind in der Regel nicht gleichmäßig verteilt.
4. Es gibt Ankerpunkte.

Ankerpunkte sind wie kleine Magneten auf der Skala, sie ziehen in ihrer Nähe viele Zugehörigkeitsgrade auf sich und lassen sie nur langsam los. Sehr gut kann man das auf einer Farbskala eines Computers beobachten. Trotz unserer Fähigkeit 18 Millionen Farbnuancen rein biologisch unterscheiden zu können, bringt unser Verstand immer Ordnung in die Farbskala, obwohl die dargestellte Farbskala bei 32 Bit Farbtiefe uns eigentlich analog erscheinen sollte. Wenn wir den Farbton z.B. auf absolut „rot" setzen und ihn dann bitweise erhöhen, erscheint uns zunächst der Farbton weiterhin „rot", obwohl wir ihn dauernd erhöhen, irgendwann gibt es im Farbton ein bißchen „orange", wir müssen uns konzentrieren, um das überhaupt wahrzunehmen, dann wird das „orange" deutlicher und plötzlich ist das „rot" verschwunden, und wir sehen nur noch „orange".

- Untermengen von intensionalen Zadeh Mengen

Untermengen sind eine besondere Klasse von Teilmengen.

1. Alle Untermengen sind echte Teilmengen der zugehörigen Obermengen.

- Beispiel 1

Die Menge aller großen Männer ist eine echte Teilmenge der Menge aller Männer.

- Beispiel 2

Rainer Rauch ist zwar eine echte Teilmenge der Menge aller Männer, aber keine Untermenge.

- Beispiel 3

Die Menge aller Männer, die „Rainer Rauch" heißen, ist aber eine Untermenge der Menge aller Männer.

2. Die Intension einer Untermenge enthält die Intension der zugehörigen Obermenge und mindestens eine zusätzliche Intension.

- Beispiel 4

Die Menge aller rechtshändigen, großen Männer ist eine Untermenge der Menge aller Männer, der Menge aller großen Männer und der Menge aller rechtshändigen Männer.

- Beispiel 5

Die Menge aller Menschen, die Männer sind, ist keine Untermenge aller Männer.

- Beispiel 6

Aber die Menge aller Männer, die echte Menschen sind, ist eine Untermenge der Menge aller Männer.

3. **Intension**$_O$ sei die gemeinsame Intension der Obermenge $\mathbf{M}_O$ und der Untermengen $\mathbf{M}_U$ von $\mathbf{M}_O$, dann sind die zusätzlichen **Intensionen**$_{1,\ 2,\ 3,\ \text{usw.}}$ jeder Untermenge $\mathbf{M}_U$ von $\mathbf{M}_O$ „und" verknüpfte Beschränkungen, Spezialisierungen oder Funktionen der **Intension**$_O$.

Beispiel 1 ist in Ordnung, weil „groß Sein" eine besondere Art von „Mann Sein" ist.

Beispiel 2 ist falsch, weil „Rainer Rauch Sein" keine Intension ist.

Beispiel 3 ist in Ordnung, weil „Rainer Rauch Heißen" eine Intension ist, die eine besondere Art von „Mann Sein" ist.

Beispiel 4 ist in Ordnung, weil sowohl „rechtshändig Sein" als auch „groß Sein" eine besondere Art von „Mann Sein" ist.

Beispiel 5 ist falsch, weil „Mensch Sein" keine besondere Art von „Mann Sein" ist.

Beispiel 6 ist in Ordnung, weil „ein echter Mensch Sein", d.h. besonders „menschlich Sein" eine besondere Art von „Mann Sein" ist.

6.7. Das Zadeh Komplement der Menge aller Männer.

Um das Zadeh Komplement einer intensionalen Zadeh Menge zu bestimmen, müssen wir zunächst eine passende Obermenge zur Menge aller Männer finden. Das ist nicht besonders schwierig, es ist die Menge aller Menschen. Da die beiden Mengen nicht gleich mächtig sind, kann man die Elementweise Komplementbildung nicht durchführen. (Dies ist übrigens ein prinzipieller Einwand gegen Komplementbildung intensionaler Mengen nach Zadeh).

Da die Menge aller Menschen eine Obermenge der Menge aller Männer ist, ist die Intension „Mensch Sein" eine gemeinsame Intension beider Mengen und da die Intension „Mann Sein" eine besondere Form des „Mensch Sein" ist, schlage ich folgende Notation vor:

$M_{MENSCHEN}$ =

{(Fritz, 1>1), (Fred, 1>0.8), (Barbarella, 0.6>0),(Anatole,1>1), (Anna, 1>0), (Rainer,1>1), ... }

sei die Menge aller Menschen, wobei die erste Zahl, des Tupels „m>n" den Zugehörigkeitsgrad zur Menge der Menschen angibt und die zweite Zahl die Zugehörigkeit zur Menge der Männer. Das Zeichen „>" soll zeigen, daß „m" vor „n" kommt, also eine höhere Intension angibt. Wenn wir das in eine Tabelle packen, wird das Ganze vielleicht etwas deutlicher:

Name	Grad des Menschseins	Grad des Mannseins
Fritz	1	1
Fred	1	0.8
Barbarella	0.6	0
Anatole	1	1
Anna	1	0
Rainer	1	1

Die Menge aller Männer erhält man, in dem man alle Elemente löscht, die den Zugehörigkeitsgrad „0" bei der Intension „Mann Sein" haben:

$M_{MÄNNER}$ =

{(Fritz, 1>1), (Fred, 1>0.8), (Anatole, 1>1), (Rainer,1>1), ... }

Name	Grad des Menschseins	Grad des Mannseins
Fritz	1	1
Fred	1	0.8
Anatole	1	1
Rainer	1	1

Das Komplement der Menge aller Männer erhält man, in dem man in der Menge aller Menschen

1. den Grad des Mannseins mit „1 - Grad des Mannseins" bestimmt und
2. alle Elemente löscht, die den Zugehörigkeitsgrad „0" bei der Intension „1 - Grad des Mannseins" haben.

Schritt 1: Komplement der Menge aller Menschen bezüglich der Intension „Mann Sein"

Name	Grad des Menschseins	1-Grad des Mannseins
Fritz	1	0
Fred	1	0.2
Barbarella	0.6	1
Anatolee	1	0
Anna	1	1
Rainer	1	0

Schritt 2: Komplement der Menge aller Männer:

$MC_{MÄNNER}$ =

{(Fred, 1>0.2), (Barbarella, 0.6>1), (Anna, 1>1), ... **}**

Name	Grad des Menschseins	1-Grad des Mannseins
Fred	1	0.2
Barbarella	0.6	1
Anna	1	1

Wie man sehen kann, erhalten wir auf diese Weise genau das, was eigentlich zu erwarten war, und können zusätzlich noch feststellen, daß das Ergebnis eine Erweiterung des Cantor Komplements ist, denn „Fred" würde bei einer Cantor Menge nicht erscheinen.

Die von mir hier vorgeschlagene Darstellungsweise „m>n" ist eine von vielen möglichen, man findet in der Literatur vor allem die folgende Darstellungsweise, nämlich „m, n, o, p, ...", die aber verschiedene Schwächen aufweist. Zunächst einmal sieht es so aus, daß die verschiedenen Zugehörigkeitsgrade beliebig sind, was aber nach der Definition der Untermenge nicht sein darf. Man könnte sie als implizite „und" Verknüpfungen deuten, also „m + n + o + p + ...", aber das würde auch für Zadeh Mengen mit willkürlichen Eigenschaften zutreffen, und scheint mir dort auch vollkommen angebracht zu sein. Außerdem ist ihre Anordnung beliebig, d.h. eine Formulierung von Regeln, wie wir sie oben durchgeführt haben, ist nicht möglich ohne die Definition einer Ordnungsrelation, dann ist diese Notation aber zu meiner äquivalent, ohne daß man es ihr direkt ansieht.

Eine andere Notation, die ich inhaltlich eigentlich bevorzugen würde, wäre eine funktionale Darstellung, also „n(m)" (inhaltlich: das männliche am Mensch Sein), wobei der innerste Kern bei allen Operationen unverändert bleibt. Für diese Darstellung spricht, daß man auf ihr leicht die üblichen Gruppeneigenschaften bestimmen kann, wenn es sie denn gibt. Aber sie scheint mir in diesem Zusammenhang nicht so einsichtig und klar zu sein.

Prüfen wir zum Schluß noch, ob wir auf diese Weise auch herausbekommen, ob die Teilmengen-, Vereinigungsmengen- und Schnittmengenbeziehung bestimmbar sind.

$M_{MENSCHEN}$ =

{(Fritz, 1>1), (Fred, 1>0.8),(Barbarella, 0.6>0),(Anatole, 1>1), (Anna, 1>0), (Rainer,1>1), ... }

$M_{MÄNNER}$ =

{(Fritz, 1>1), (Fred, 1>0.8), (Anatole, 1>1), (Rainer,1>1), ... }

Da jedes Element von $M_{MÄNNER}$ auch Element $M_{MENSCHEN}$ ist, gilt

$$M_{MÄNNER} \subset M_{MENSCHEN}.$$

$$M_{MENSCHEN} = M_{MENSCHEN} \cup M_{MÄNNER}$$

Wie zu erwarten, ist die Vereinigung von Obermenge und Untermenge genau die Obermenge.

$$M_{MÄNNER} = M_{MENSCHEN} \cap M_{MÄNNER}$$

Wie zu erwarten, ist die Schnittmenge von Obermenge und Untermenge genau die Untermenge.

Außerdem kann man für alle drei Beziehungen feststellen, daß Zadeh Mengen und Cantor Mengen in diesem Fall äquivalent sind.

Was noch zu prüfen bleibt, ist ob die Vereinigungsmenge einer Zadeh Menge mit ihrer Komplementmenge ebenfalls Sinn macht.

$M_{MÄNNER}$ =

{(Fritz, 1>1), (Fred, 1>0.8), (Anatole, 1>1), (Rainer,1>1), ... }

$MC_{MÄNNER}$ =

{(Fred, 1>0.2), (Barbarella, 0.6>1), (Anna, 1>1), ... }

Offensichtlich müssen wir hier das Regelwerk von Zadeh ergänzen, bzw. modifizieren. Das liegt daran, daß der Zugehörigkeitsgrad „0" bei Zadeh nicht vorkommen darf, weil es sonst keine leere Menge gibt und jede Menge um beliebig viele Elemente mit dem Zugehörigkeitsgrad „0" erweiterbar wird.

Der hier vorgeschlagene Typ unscharfer Mengen erlaubt aber den Zugehörigkeitsgrad „0" an der zweiten Stelle, und deshalb erweitern wir die Regelmenge um folgende Regel:

(E, m>n) sei ein Element der Menge M_C, aber nicht Element der Menge M, dann ist (E, m>0) Element der Vereinigungsmenge $M_V = M_C \cup M$.

Wenden wir diese Regel und die Standardregel zur Mengenvereinigung an, erhalten wir folgende Tabelle:

Name	Grad des Menschseins	Grad des Mannseins
Fritz	1	1
Fred	1	0.8**
Barbarella	0.6	0*
Anatole	1	1
Anna	1	0*
Rainer	1	1

* entsprechend der oben formulierten Regel auf „0" gesetzt.

** entsprechend der Standardregel den höheren Grad gewählt.

Diese Tabelle entspricht aber vollkommen unserer Tabelle der Menge aller Menschen, d.h.:

$M_{MENSCHEN} = MC_{MÄNNER}$ $M_{MÄNNER}$ wie es zu erwarten war, aber die Vereinigungsoperation ist nicht mehr kommutativ, denn

$M_{MENSCHEN} = M_{MÄNNER} \cup MC_{MÄNNER}$ führt zu einer anderen Tabelle, nämlich

Name	Grad des Menschseins	Grad des Frauseins
Fritz	1	0*
Fred	1	0.8**
Barbarella	0.6	1
Anatole	1	0*
Anna	1	1
Rainer	1	0*

* entsprechend der oben formulierten Regel auf „0" gesetzt.
** entsprechend der Standardregel den höheren Grad gewählt.

Wir erhalten zwar wieder die Menge aller Menschen, aber der zweite Zugehörigkeitsgrad „n" klassifiziert diese Menge nach dem Grad des „Frauseins". Interessant ist, daß „Fred" in der Menge aller Menschen mit dem gleichen Zugehörigkeitsgrad des Frauseins und des Mannseins erscheint, in der Menge aller „*nicht* Männer" aber nur mit dem Zugehörigkeitsgrad „0.2"

Diese Interpretation entspricht nicht genau unserer Intuition, denn Fred ist unter dem Gesichtpunkt „ein Mann zu sein" eher ein Mann und unter dem Gesichtspunkt „eine Frau zu sein" eher eine Frau, was ich persönlich so nicht erwarten würde, aber ich bin auch kein Spezialist für „besondere Männer oder Frauen".

7 Heuristik

Das folgende Zitat soll einen in Zusammenhang mit der Anwendung von Fuzzy Logic immer wieder genannten Begriff, nämlich den der Heuristik, kurz vorstellen.

- Abduktion und Heuristik (von Volker Peckhaus, Erlangen)

[Erschienen in: *Rationalität, Realismus, Revision.Vorträge des 3. Internationalen Kongresses der Gesellschaft für Analytische Philosophie*, hg. v. Julian Nida-Rümelin, Walter de Gruyter: Berlin/New York 1999 (= *Perspekt ven der Analytischen Philosophie*; 23), 833–841.]

1. Einleitung

„Heuristik" ist definiert worden als die „Lehre von den Verfahren, Probleme zu lösen, also für Sachverhalte empirischer und nicht-empirischer Wissenschaften Beweise oder Widerlegungen zu *finden*", so von Kuno Lorenz in der *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie* (Lorenz 1984, 99f.); „heuristisch", so meint Heinrich Schepers, seien solche Verfahren, Grundsätze oder Methoden, die „[...] etwas zur Erkenntniserweiterung beitragen, ohne selbst die Sicherheit der gewonnenen Erkenntnisse begründen zu können" (Schepers 1974, Sp. 1120). Beide Bestimmungen sind wohl zu eng, denn warum sollte eine Heuristik auf den Problemlösungsaspekt beschränkt sein, also nicht auch der durch kein Problem beschwerten Befriedigung der Neugier dienen, und warum sollten heuristische Methoden nicht auch auf sichere Erkenntnisse führen können? Es scheint daher sinnvoll zu sein, bei der ursprünglichen Wortbedeutung zu bleiben, die ja auch in dem korrespondierenden lateinischen Ausdruck „ars inveniendi", Erfindungs- oder Findungskunst, steckt. Danach wären heuristische Verfahren solche Verfahren, die auf neue Erkenntnisse führen. Sie sind insofern erkenntniserweiternd, als sie neue Erkenntnisse stiften. So hat z.B. der Algorithmus zur Erzeugung von Primzahlen eine heuristische Funktion, da er mit Großrechnerhilfe auf immer neue, bisher von niemandem gekannte Primzahlen führt, die also durchaus als neue Erkenntnisse angesehen werden können und zwar als sichere neue Erkenntnisse.